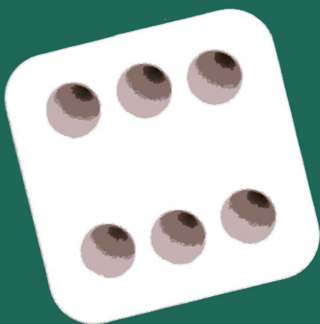
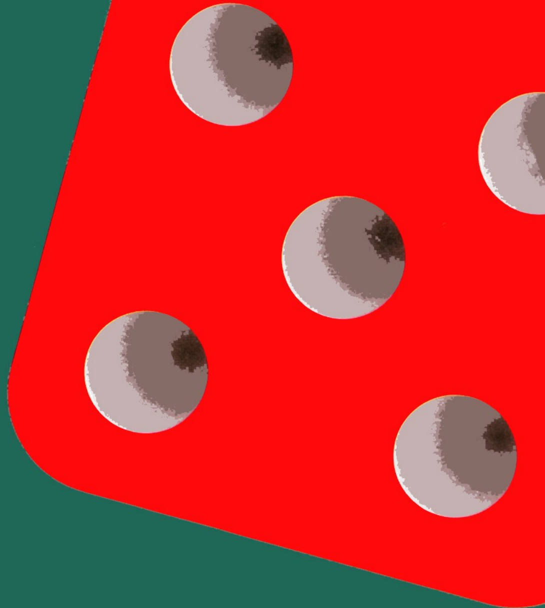
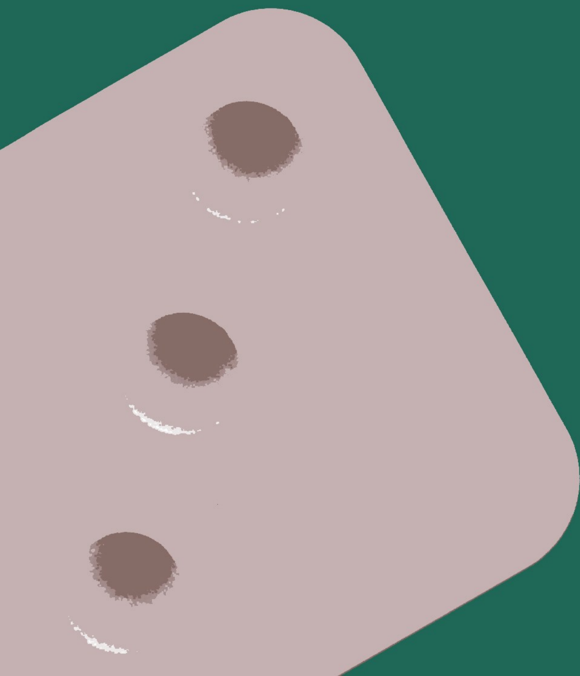




Aleksandras Plikusas

KOMBINATORIKOS, TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR STATISTIKOS PRADMENYS



11 - 12

Aleksandras Plikusas

KOMBINATORIKOS, TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR STATISTIKOS PRADMENYS

Mokomoji knyga
XI–XII klasei



Kaunas „Šviesa“ 1998

UDK 519.1/.2(075.3)
Pl-66

Recenzavo prof. PRANAS SURVILA

Redaktorė NIJOLĖ RAMANAUSKIENĖ

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos leista naudoti
1998 08 20, Nr. 270

2-asis pataisytas leidimas

ISBN 5-430-02693-X

PRATARMĖ

Tikimybių teorijos ir statistikos pradmenys dėstomi daugelio Europos valstybių bendrojo lavinimo mokyklose. Kombinatorikos ir tikimybių teorijos uždaviniai sprendžiami per matematikos egzaminą. Šias temas pradedama dėstyti ir Lietuvoje.

Ši mokomoji knyga skiriama tiek mokytojui, tiek mokiniui. Joje apibūdinamos pagrindinės kombinatorikos, tikimybių teorijos ir statistikos sąvokos, sprendžiami uždaviniai, pateikiama uždavinių savarankiškam sprendimui. Pradėjus mokyti matematikos skirtingais lygiais, turėtų atsirasti ir atskiri kiekvieno lygio matematikos vadovėliai. Juose turėtų būti ir šioje knygoje dėstomos temos. Autorius bandė parašyti tokią mokymo priemonę, kuria bent laikinai galėtų naudotis visų dėstymo lygių mokytojai ir mokiniai. Tai šiek tiek apsunkins naudojimąsi šia knyga. Kita vertus, stengtasi plačiau paaiškinti svarbesnes sąvokas – įvykių nepriklausomumą, sąlyginę tikimybę ir kitas, taip pat kai kuriuos žymėjimus. Mokytojo neturėtų gąsdinti nemažas skaičius teiginių, vadinamų teoremomis. Daugelis jų intuityviai akivaizdūs, lengvai iliustruojami pavyzdžiais. Sakykime, Paskalio taisyklės galima mokiniams neįrodinėti, o tik paaiškinti Paskalio trikampio sudarymą. Dėstant B lygiu, įrodymų reikėtų pateikti mažiau. Svarbiausia yra pasiekti, kad mokiniai gebėtų savarankiškai spręsti nesudėtingus uždavinius. Sunkesni uždaviniai pažymėti žvaigždute (*).

Visos čia nagrinėjamos temos buvo dėstomos Vilniaus tiksliųjų gamtos ir technikos mokslų licėjuje. B lygiui rekomenduojamos temos išdėstytos šiuose skyreliuose: 1.1, 1.2, 1.3, 2.1–2.5, 2.8, 3.1, 3.2, A lygiui siūlomi papildomi 1.4, 2.6, 3.3, 3.4, 3.5 skyreliai.

Autorius dėkoja matematikos mokslų daktarui J. Mačiui už vertingus patarimus elementaraus tikimybių teorijos ir statistikos pradmenų pateikimo klausimais, taip pat recenzentui profesoriui Pr. Survilai, įdėmiai perskaičiusiam rankraštį ir pateikusiam nemažai vertingų pastabų, siūlymų. Leidinyje panaudota keletas recenzento pasiūlytų sudėtinių kombinatorikos uždavinių.

Pastabas ir siūlymus prašome siųsti šiuo adresu:

Kultūros ir švietimo ministerija,

A.Volano 2/7,

2000 Vilnius

PRATARMĖ ANTRAJAM LEIDIMUI

Šiame leidime pakeičiau kai kuriuos žymėjimus, patikslinau keleto sąvokų vartojimą, ištaisiau pastebėtas korektūros klaidas.

Atsižvelgiau į gautas pastabas: įdėjau daugiau uždavinių, dažniausiai tai žodiniai uždaviniai, labiau orientuoti į sąvokų, teiginių, taisyklių suvokimą, o ne į mechaninį skaičiavimą.

Čia išdėstytos temos po kiek laiko bus įtrauktos į naujus aukštesniųjų klasių matematikos vadovėlius. Statistikos dalis turėtų būti ženkliai išplėsta ir pateikta šiuolaikiškesne forma, naudojant daugiau grafinių priemonių, iliustracijų.

Dėkoju pedagogams bei Matematikos ir Informatikos instituto kolegoms už vertingas pastabas bei pasiūlymus abiem leidimams.

Aleksandras Plikusas

1 SKYRIUS
KOMBINATORIKOS PRADMENYS

Įvairių sričių specialistams tenka spręsti uždavinius, kuriuose nagrinėjamos skaičių, raidžių ar kitų objektų kombinacijos. Gamykloje reikia paskirstyti užduotis, atsižvelgiant į turimas stakles, mokykloje sudaryti pamokų tvarkaraštį, žemės ūkyje parinkti sklypus pasėliams ir t.t. Kombinatorika ir yra matematikos sritis, nagrinėjanti, kiek skirtingų kombinacijų, tenkinančių tam tikras sąlygas, galima sudaryti iš nurodytų objektų. Istoriškai pirmieji kombinatorikos (kaip ir tikimybių teorijos) uždaviniai buvo susiję su azartiniais lošimais. Toliau pateikiame konkrečių pavyzdžių, kurie padės geriau suvokti kombinatorikos uždavinių esmę.

Uždavinio sprendimo, teoremos įrodymo, pavyzdžio pabaigą žymėsime ženklu ■.

1.1. KĖLINIAI. KOMBINATORINĖ DAUGYBOS TAISYKLĖ. GRETINIAI

KĖLINIAI

1.1 uždavinys. Keliais būdais galima sustatyti lentynoje vieną šalia kitos tris knygas?

Sprendimas. 1 būdas. Pažymėkime knygas raidėmis A, B ir C. Parašykime visus galimus knygų sustatymo būdus ir suskaičiuokime juos. Kad nepraleistume nė vieno knygų sustatymo atvejo, sudarykime lentelę – vadinamąjį medį (1.1 pav.).

	Pirma knyga	Antra knyga	Trečia knyga	Galimi sustatymo būdai
O	A	B	C	ABC
		C	B	ACB
	B	A	C	BAC
		C	A	BCA
	C	A	B	CAB
		B	A	CBA

1.1 pav.

Matome, kad 3 knygas lentynoje galime sustatyti 6 skirtingais būdais, kurie surašyti lentelės dešiniojoje skiltyje.

2 būdas. Dabar samprotaukime kitaip. Reikia užimti tris lentynos vietas. Jas pavaizduosime taip:

Pirmoje vietoje galime pastatyti arba knygą A, arba knygą B, arba knygą C. Todėl yra trys pirmos vietos užpildymo būdai:

3		

Iš medžio (1.1 pav.) taško O matome išeinančias 3 šakas. Kiekvienu iš trijų pirmos vietos užpildymo atvejų į antrą vietą galime pastatyti vieną iš dviejų likusių knygų, t. y. antrą vietą galime užpildyti 2 būdais:

3	2	

1.1. paveiksle matome, kad būtent šešios (3 x 2) šakos pasiekia medžio stulpelį „Antra knyga“. Taigi pirmas dvi knygas galime pastatyti šešiais būdais. Kiekvienu iš šių šešių atvejų trečiai vietai užpildyti lieka viena knyga:

3	2	1

Gautas rezultatas $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ atitinka medžio stulpelio „Trečia knyga“ šešias šakas. ■

Dabar jau nesunku suprasti, kad 4 knygas galėsime sustatyti lentynoje 24 skirtingais būdais: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

1.2 uždavinys. Futbolo pirmenybėse dalyvauja 12 komandų. Keliais skirtingais būdais jos gali pasiskirstyti vietomis turnyro lentelėje?

Sprendimas. Pirmąją vietą gali užimti viena iš 12 komandų. Kiekvienu iš šių 12 atvejų yra 11 kandidatų į antrąją vietą. Taigi pirmosios dvi vietos gali pasiskirstyti $12 \cdot 11 = 132$ būdais. Kiekvienam iš šių 132 būdų lieka 10 kandidatų į 3-iąją vietą ir t.t. Lengva suprasti, kad visos 12 komandų gali pasiskirstyti vietomis $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479\,001\,600$ būdų. ■

1.1 apibrėžimas

Bet kuris tam tikro skaičiaus objektų dėstinys (išdėstymas) vadinamas **kėliniu**.

Pavyzdžiai. Knygų dėstiniai ACB ir CAB yra kėliniai. Futbolo komandų pasiskirstymas vietomis pirmenybių lentelėje yra kėlinys.

FAKTORIALAS

Jau sužinojome, kad:

1) 3 knygas galima sustatyti lentynoje $3 \cdot 2 \cdot 1$ būdais;

2) 4 knygas galima sustatyti lentynoje $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ būdais;

3) 7 žmonės gali atsistoti eilėje $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ būdais;

4) 12 komandų gali pasiskirstyti vietomis turnyro lentelėje $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ būdais;

5) n objektų galima išdėstyti vieną po kito $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ būdais.

Daugtaškis rodo, kad dauginti skaičius pradedame nuo natūraliojo skaičiaus n ir kiekvienas paskesnis dauginamasis yra vienetu mažesnis už prieš jį esantį. Paskutinis dauginamasis yra vienetas. Tokias sandaugas patogu žymėti specialiu ženklu.

1.2 apibrėžimas

Visų natūraliųjų skaičių nuo n iki 1 sandauga vadinama n faktorialu ir žymima $n!$ (skaitome „en faktorialas“; *factor* lotynų ir anglų kalba reiškia daugiklis), t.y.:

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)!$.

Taigi

$1! = 1$,

$2! = 2 \cdot 1 = 2$,

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2! = 6$,

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot 3! = 24$,

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 4! = 120$,

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 5! = 720$.

Kai n yra didelis, apskaičiuoti $n!$ reikšmę gana sunku, nes $n!$ didėja labai greitai. Pavyzdžiui, $10! = 3\,628\,800$, o $80! > 10^{99}$, ir tai jau per didelis skaičius kišeniniam skaičiuokliui. Todėl faktorialo ženklą patogu vartoti žymint didelius skaičius, kurie gaunami sprendžiant kombinatorikos uždavinius. Žinoma, faktorialo ženklą ypač patogu vartoti formulėse.

1.3 uždavinys. Tarkime, kad turime ne mažiau kaip tris knygos A egzempliorius, ne mažiau kaip tris knygos B egzempliorius ir ne mažiau kaip tris knygos C egzempliorius. Tos pačios knygos egzemplioriai visiškai vienodi. Keliais skirtingais būdais galima pastatyti lentynoje tris knygas?

Sprendimas. Kadangi turime bent tris kiekvienos knygos egzempliorius, galime sudaryti, pavyzdžiui, rinkinį *AAA* arba *ABA*. Beje, rinkinius *ABA* ir *AAB* laikome skirtingais. Tačiau jei rinkinio *AAB* vieną knygos A egzempliorių pakeisime kitu ir pastatysime toje pačioje vietoje, tai turėsime tą patį rinkinį: sąlygoje pasakyta, kad tos pačios knygos egzemplioriai visiškai vienodi. Samprotaudami taip pat, kaip ir spręsdami 1.1 uždavinį 2-uoju būdu, matome, kad kiekvieną iš trijų lentynos vietų galime užpildyti trimis būdais. Skirtingus užpildymo atvejus galime taip pavaizduoti:

3	3	3

O visus galimus knygų išdėstymo atvejus rasime daugindami: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. ■

1.4 uždavinys. Iš Vilniaus į Palangą norime nuvykti per Kauną. Tarkime, kad iš Vilniaus į Kauną galime vykti traukiniu arba autobusu, o iš Kauno į Palangą – traukiniu, autobusu, laivu arba lėktuvu. Keliais skirtingais būdais galime nuvykti iš Vilniaus į Palangą?

Sprendimas. Kelionę autobusu pažymėkime raide A, traukiniu – T, laivu – L, lėktuvu – O. Vėl nupieškime medį (1.2 pav.).

Vilnius	Kaunas	Palanga	Kelionės būdai
		T	TT
		A	TA
	T	L	TL
		O	TO
V		T	AT
		A	AA
	A	L	AL
		O	AO

1.2 pav.

Matome, kad skirtingų kelionės būdų yra $2 \cdot 4 = 8$. ■

Dabar jau nesunku suprasti, kaip spręsti tokius uždavinius šiek tiek greičiau. Tai ypač svarbu, kai reikia išdėstyti daug objektų. Tada visų galimų išdėstymo būdų užrašymas ilgai trunka. Medis padeda suprasti bendrą taisyklę, kuria naudojomės spręsdami 1.1 uždavinį 2-uoju būdu ir 1.3 uždavinį.

KOMBINATORINĖ DAUGYBOS TAISYKLĖ

Tarkime, kad turime atlikti vieną po kito k kokių nors veiksmų. Jei pirmą veiksmą galime atlikti n_1 būdų, antrą veiksmą – n_2 būdų, trečią veiksmą – n_3 būdų ir taip toliau iki k-tojo veiksmo, kurį galime atlikti n_k būdų, tai visus k veiksmų galime atlikti

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k \tag{1.1}$$

būdų.

Indeksus prie raidės n ir daugtaškį vartojame žymėdami bet kurio skaičiaus dauginamųjų sandaugą. Toks ar panašus žymėjimo būdas yra neišvengiamas, nors ir atrodo gana sudėtingas. Vartodami visas lotynų abėcėlės raides,

galėtume pažymėti tik 25 kintamuosius dydžius, o vartodami indeksus, galime pažymėti bet kurį kintamųjų skaičių. Paaiškinsime ir daugtaškio vaidmenį (1.1) formulėje. Daugtaškis rodo, kad turime parašyti visus dauginamuosius nuo n_1 iki n_k. Pabrėžiame, kad (1.1) formulėje k nebūtinai yra didesnis už 3. Kai k=2, (1.1) reiškinį suvoksime kaip $n_1 \cdot n_2$. Kai k=1, tai tą reiškinį laikysime tiesiog lygiu n_1.

Indeksus vartoti ypač patogu, kai dauginamųjų skaičius yra didelis arba tiksliai neapibrėžtas.

1.5 uždavinys. Automobilio numerį sudaro šeši ženklai: pirmieji trys – lotynų abėcėlės raidės, kiti trys – skaitmenys. Tarkime, kad numeriams vartojamos 23 raidės. Kiek galima sudaryti skirtingų automobilio numerių?

Sprendimas. Kiekvieną iš pirmųjų trijų pozicijų galime užpildyti 23 būdais, t.y. $n_1 = n_2 = n_3 = 23$. Kiekvieną iš trijų tolesnių pozicijų galime užpildyti 10 būdų (mat yra 10 skirtingų skaitmenų). Todėl $n_4 = n_5 = n_6 = 10$. Skirtingų numerių skaičių randame remdamiesi daugybos taisykle:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 \cdot n_6 = 23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 12\ 167\ 000.$$

Tiesa, dažniausiai atsisakoma ženklinti automobilius skaitmenų rinkiniu 000. Tokių numerių, kurių visi trys skaitmenys yra nuliai, o keičiamos tik raidės, būtų

$$23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 12\ 167.$$

Taigi, atsisakius „nulinių“ numerių, galima sudaryti 12 167 000 – 12 167 = 12 154 833 automobilių numerius. ■

Kombinatorinė daugybos taisyklė yra bendras metodas tam tikros baigtinės aibės objektų išdėstymo būdų skaičiui rasti. Sprendžiant kai kuriuos uždavinius (skaičiuojant išdėstymo būdus), tą metodą galima supaprastinti. Vienas iš daugybos taisyklės atvejų yra kėlinių skaičiaus teorema.

1.1 teorema

n skirtingų elementų kėlinių skaičius yra lygus $n!$.

Įrodymas. Teorema teigia, kad n skirtingų objektų (knygų, žmonių, skaičių, futbolo komandų ir t.t.) galima surikiuoti $n!$ būdų. Tai įrodysime remdamiesi kombinatorine daugybos taisykle. Tarkime, kad n objektų statome į n vietų. Į pirmąją vietą galime pastatyti bet kurį iš n objektų. Po to, kai pirmoji vieta užimta, į antrąją galime pastatyti bet kurį iš likusių $n-1$ objektų, į trečiąją – bet kurį iš $n-2$ objektų ir t.t. Todėl, remiantis daugybos taisykle, visas n vietų galima užpildyti

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

būdų. ■

GRETINIAI

1.6 uždavinys. Keliais būdais iš 7 knygų galima išrinkti 3 ir pastatyti jas į 3 lentynos vietas?

Sprendimas. Remiantis kombinatorine daugybos taisykle, tris lentynos vietas galima užpildyti $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ būdų. ∎

Užrašant sandaugą $7 \cdot 6 \cdot 5$, galima vartoti faktorialo simbolį:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{4!}.$$

1.3 apibrėžimas

Bet kuris r ($r \leq n$) elementų, paimtų iš n elementų aibės, dėstinys vadinamas **gretiniu** iš n elementų po r.

Gretinių iš n elementų po r skaičius žymimas A_n^r (A – pirmoji prancūzų kalbos žodžio *arrangement* – sutvarkymas – raidė).

1.6 uždavinyje apskaičiavome, kad $A_7^3 = 210$.

Matome, kad gretinio sąvoka yra bendresnė nei kėlinio: n elementų kėlinys yra gretinys iš n elementų po n.

1.2 teorema

Gretinių iš n elementų po r skaičius lygus

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}, \qquad 0 \leq r \leq n. \tag{1.2}$$

Įrodymas. Taikysime kombinatorinę daugybos taisyklę. Sakykime, n-elementės aibės elementus reikia sustatyti į r vietų. Į pirmą vietą galime padėti vieną iš n elementų. Lieka $n-1$ elementas, ir bet kuris iš jų gali užimti antrą vietą. Į trečią vietą yra $n-2$ kandidatai ir t.t. Galiausiai į r-tąją vietą lieka rinktis elementą iš $n-(r-1)$ elemento. Remdamiesi daugybos taisykle, visas r vietų galime užpildyti

$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \tag{1.3}$$

būdų.

Kai $r < n$, (1.3) lygybės dešiniąją pusę padauginę ir padaliję iš $(n-r)!$, gausime:

$$A_n^r = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)(n-r)(n-r-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

(1.3) formulė yra apibrėžta su visais $1 \leq r \leq n$. Laikoma, kad $A_n^0 = 1$. Kai $r < n$, (1.2) ir (1.3) formulės sutampa. Kai $r = n$, (1.2) formulė yra tokia:

$$A_n^n = \frac{n!}{0!}.$$

Susitarta, kad $0! = 1$. Tada (1.2) ir (1.3) formulės sutaps su visais r, $r = 0, 1, 2, \ldots, n$. ∎

1.7 uždavinys. Studentas per 10 dienų turi išlaikyti 3 egzaminus. Per dieną jis laiko ne daugiau kaip vieną egzaminą. Keliais būdais jis gali susidaryti tvarkaraštį?

Sprendimas. Šis uždavinys labai panašus į 1.6 uždavinį, tik čia knygas pakeitė dienos, o vietas lentynoje – egzaminai. Vadinasi, reikia rasti gretinių iš 10 elementų po 3 skaičių A_{10}^{3} . Remkimės (1.2) formule:

$$A_{10}^{3}=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!}=10\cdot 9\cdot 8=720.$$

Atsakymas. Tvarkaraštį galima sudaryti 720 būdų. ■

UŽDAVINIAI

1. Apskaičiuokite: A_9^2 , A_n^1 , A_6^6 , A_{11}^3.
2. Valgykloje pietums renkamės vieną iš 3 pirmųjų patiekalų, vieną iš 4 antrųjų ir vieną iš 2 desertų. Kiek skirtingų pietų galime pasirinkti?
3. Algirdas susiruošė pirkti kompiuterį, kurį sudaro procesorius, vaizduoklis ir spausdintuvas. Parduotuvėje buvo 4 rūšių procesorių, 3 rūšių vaizduoklių ir 5 rūšių spausdintuvų. Keliais būdais Algirdas gali sukomplektuoti kompiuterį?
4. Į rinkimų biuletenį kuria nors eilės tvarka turi būti įrašytos 6 kandidatų į savivaldybės deputatus pavardės. Keliais būdais tai galima padaryti?
5. Automobilių parduotuvė prekiauja 4 modelių automobiliais. Kiekvieno modelio automobiliai yra 6 spalvų ir gali turėti 2 rūšių variklius. Kiek automobilių reikia turėti ekspozicijoje norint demonstruoti po vieną kiekvieno modelio, kiekvienos spalvos ir variklio rūšies automobilį?
6. Kiek yra penkiaženklių skaičių?
7. Kiek penkiaženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 4, 6, 7, 8? Nė vienas skaitmuo sudarytame skaičiuje neturi kartotis. Kiek tų skaičių bus lyginiai?
8. Futbolo pirmenybėse dalyvauja 16 komandų. Kiek yra būdų joms pasiskirstyti pirmąsias 3 vietas?
9. Reikia nudažyti tris namus. Kiekvienam jų galima parinkti vieną iš 6 spalvų.
   a) Keliais skirtingais būdais tai galima padaryti?
   b) Kiek yra būdų nudažyti namus skirtingomis spalvomis?
10. Gyvenamųjų namų statybos bendrovė turi aštuonis skirtingus namų projektus ir numato statyti namus penkiuose gretimuose sklypuose.
    a) Kiek yra būdų pastatyti skirtingus namus šiuose sklypuose?
    b) Kiek yra būdų išrinkti projektus nereikalaujant, kad šių sklypų namai būtų skirtingi?
11. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5 sudaromi triženkliai skaičiai. Kiek galima sudaryti lyginių triženklių skaičių, turinčių skirtingus skaitmenis? Kiek nelyginių?
12. Daugiakampio viršūnes žymime skirtingomis didžiosiomis raidėmis. Kiek yra būdų sužymėti 25 lotynų abėcėlės raidėmis trikampio viršūnes? Penkiakampio viršūnes?
13. Turite 8 skirtingas poras pirštinių. Kiek yra būdų pasirinkti vieną kairės rankos ir vieną dešinės rankos skirtingų porų pirštinę?
14. Miestus A ir B jungia trys keliai , o miestus B ir C – keturi keliai. Kiek yra būdų nuvažiuoti iš A į C per B ir grįžti per B?

1.2. KOMBINATORINĖ SUDĖTIES TAISYKLĖ. SUDĖTINIAI UŽDAVINIAI

Nors daugybos taisyklė yra pakankamai universali, esama daug uždavinių, kuriuose neužtenka vien tik pritaikyti šią taisyklę norint iš karto gauti atsakymą.

Pavyzdys. Vazoje yra 6 obuoliai ir 4 kriaušės. Norime paimti du vaisius: vieną obuolį ir vieną kriaušę. Tai padaryti galime $6 \cdot 4 = 24$ būdais. Dabar sakykime, kad norime paimti tik vieną vaisių – obuolį arba kriaušę. Suprantama, kad tai galima padaryti $6 + 4 = 10$ būdų. Jei vazoje būtų dar 3 apelsinai, tai vieną vaisių galėtume pasirinkti $6 + 4 + 3 = 13$ būdų. ■

KOMBINATORINĖ SUDĖTIES TAISYKLĖ

Sakykime, yra n_1 pirmosios rūšies elementų, n_2 antrosios rūšies elementų, ..., n_k k-tosios rūšies elementų. Pasirinkti iš jų vieną elementą (arba pirmosios, arba antrosios, ..., arba k-tosios rūšies) galima

$$n_1 + n_2 + ... + n_k$$

būdų.

Pabrėžiame, kad sudėties taisyklė susijusi su žodeliu „arba“ (obuolys arba kriaušė), o daugybos taisyklė – su žodeliu „ir“ (obuolys ir kriaušė).

1.8 uždavinys. Močiutė vaikaičiui gimimo dienos proga pažadėjo nupirkti elektroninį skaičiuoklį arba laikrodį. Parduotuvėje buvo 5 rūšių skaičiuoklių ir 7 rūšių laikrodžių. Keliais būdais vaikaitis gali pasirinkti dovaną? Keliais būdais jis galėtų pasirinkti dovaną, jei močiutė dovanotų skaičiuoklį ir laikrodį?

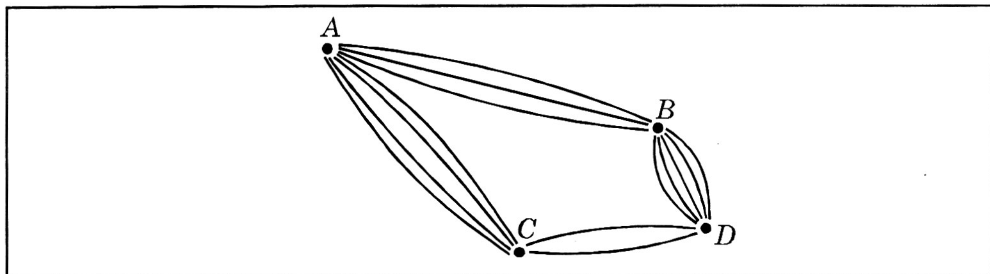
Sprendimas. Vieną daiktą galima pasirinkti $5 + 7 = 12$ būdų, o du daiktus $5 \cdot 7 = 35$ būdais. ■

SUDĖTINIAI UŽDAVINIAI

Matome, kad sudėties taisyklė gana paprasta. Tokius uždavinius, kuriems išspręsti pakanka tik sudėties taisyklės, lengvai įveiktume jos ir nežinodami. Tačiau dažnai tenka sudėties ir daugybos taisykles taikyti viename uždavinyje. Tokius uždavinius vadiname sudėtiniais.

1.9 uždavinys. Iš miesto A eina 3 keliai į miestą B ir 4 keliai į miestą C. Į miestą D iš miesto B veda 5 keliai, o iš miesto C – 2 keliai. Tarp miestų B ir C kelių nėra (1.3 pav.). Kiek skirtingų autobuso maršrutų galima sudaryti tarp miestų A ir D ?

Sprendimas. Autobuso maršrutas iš A į D gali eiti arba per miestą B, arba per miestą C. Remiantis sudėties taisykle, abiejų rūšių maršrutų skaičius



1.3 pav.

reikės sudėti. Gausime visų galimų maršrutų skaičių. Iš A į B galima vykti 3 keliais, ir kiekvieną tų maršrutų galima derinti su bet kuriuo iš kelių, einančių iš B į D. Todėl, remiantis daugybos taisykle, iš A į D per B galima nuvažiuoti $3 \cdot 5 = 15$ būdų. Analogiškai apskaičiuojame, kad iš A į D per C galima nuvažiuoti $4 \cdot 2 = 8$ būdais. Taigi galima sudaryti $15 + 8 = 23$ skirtingus autobuso maršrutus. ■

UŽDAVINIAI

15. Kiek yra mažesnių už 1000 natūraliųjų skaičių, kurie dalijasi iš 5?

16. Kiek yra ne mažesnių už 100 ir mažesnių už 10 000 natūraliųjų skaičių, kurie dalijasi iš 5?

17. Įmonės pavadinimui sudaryti pasirinktos 6 skirtingos raidės. Kiek iš jų galima sugalvoti įmonės pavadinimų, kuriuos sudarytų ne mažiau kaip 3 ir ne daugiau kaip 5 skirtingos raidės?

18. Dešimt draugų susitiko vakarėlyje ir vienas su kitu sveikinosi paspausdami ranką. Kiek kartų buvo paspaustos rankos?

19. Kiek yra natūraliųjų skaičių, mažesnių už 1000 ir neturinčių vienodų skaitmenų?

20. Anglai naujagimiui (berniukui) gali duoti ne daugiau kaip 3 vardus (eilės tvarka svarbi). Kiek yra būdų parinkti naujagimiui vardus iš 13 vardų?

1.3. DERINIAI

Pavyzdys. Konkurse dalyvaus 3 narių komanda. Kiek skirtingų komandų galima sudaryti iš 4 kandidatų?
Čia eilės tvarka, kuria būtų išrikiuoti komandos nariai, nesvarbi. Mus domina tik komandos sudėtis (derinys): kas iš keturių kandidatų pateks į komandą, o kas — ne.

1.10 uždavinys. Keliais būdais skaitytojas gali pasirinkti 3 knygas iš 4? (Knygų pasirinkimo tvarka skaitytojui nesvarbi.)

Sprendimas. Jau žinome, kad 4 elementų gretinių po 3 yra $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Tačiau gretinyje atsižvelgiama į elementų eilės tvarką. Kas

kita, jei norime pasirinkti 3 knygas (3 elementus) iš keturių, nekreipdami dėmesio į eilės tvarką. Pažymėję knygas raidėmis A, B, C, D, sudarome visus galimus pasirinkimo būdus:

$$ABC, \quad ABD, \quad ACD, \quad BCD\,. \tag{1.4}$$

(Galime neimti arba knygos D, arba knygos C, arba knygos B, arba knygos A.) Rinkiniai (gretiniai) ABC ir ACB šiame uždavinyje laikomi vienodais. Kiekvienas trijų knygų rinkinys iš keturių vadinamas deriniu iš keturių knygų po tris. Derinių skaičių žymime raide C su indeksais, šiuo atveju: C_4^3. Sudarydami (1.4) sąrašą, įsitikinome, kad

$$C_4^3 = 4. \quad \blacksquare$$

Pabrėžiame skirtumą tarp gretinių ir derinių: gretiniuose atsižvelgiama į elementų (objektų) eilės tvarką, o deriniuose į ją neatsižvelgiama.

Pradėdami spręsti kombinatorikos uždavinį, pirmiausia turime išsiaiškinti, reikia ar nereikia atsižvelgti į elementų išdėstymo tvarką.

Nagrinėjant 1.10 ir panašius uždavinius, patogu vartoti aibių kalbą. Aibių ir poaibių sąvokos yra universalios. Visai nesvarbu, ar norime išrinkti tris knygas iš penkių knygų, ar tris žmones iš penkių žmonių. Kombinatorikoje svarbus tik aibės elementų skaičius, o ne jų prigimtis. Galima kalbėti apie aibės

$$\{ A, B, C, D \}$$

skirtingus trielemenčius poaibius. Nustatėme, kad keturelementė (nebūtinai knygų) aibė turi keturis trielemenčius poaibius. Dabar pateiksime bendrą derinio iš n elementų po r apibrėžimą.

1.4 apibrėžimas

Objektų rinkinys, kuriame neatsižvelgiama į tų objektų eilės tvarką, vadinamas **deriniu**. Bet kuris n-elementės aibės (nesutvarkytas) r-elementis poaibis ($r \leq n$) vadinamas deriniu iš n elementų po r.

Derinių iš n elementų po r skaičius yra žymimas C_n^r. (Skaitome „cė iš en po er“, C – pirmoji prancūzų kalbos žodžio *combinaison* – derinys – raidė.)

Dabar išvesime formules derinių iš n elementų po r skaičiui C_n^r apskaičiuoti. Prisiminkime, kaip radome derinių iš 4 po 3 skaičių 1.10 uždavinyje. Žinome, kad kiekvieno trijų knygų rinkinio knygas galime perstatyti $3! = 6$ būdais. Taigi perstatydami kiekvieno rinkinio (derinio) knygas, galime sudaryti tokią lentelę:

Deriniai	Gretiniai					
ABC	*ABC*	*ACB*	*BAC*	*BCA*	*CAB*	*CBA*
ABD	*ABD*	*ADB*	*BAD*	*BDA*	*DAB*	*DBA*
ACD	*ACD*	*ADC*	*CAD*	*CDA*	*DAC*	*DCA*
BCD	*BCD*	*BDC*	*CBD*	*CDB*	*DBC*	*DCB*

Čia sudarėme visus galimus kiekvieno derinio iš 4 knygų po 3 gretinius, todėl jų skaičius lentelėje lygus

$$C_4^3 \cdot 3! = A_4^3 .$$

Taigi

$$C_4^3 = \frac{A_4^3}{3!} = \frac{\frac{4!}{(4-3)!}}{3!} = \frac{4!}{3!} = 4 .$$

Panašiai galima apskaičiuoti C_n^r su bet kuriais n ir r. Tai padaryti padeda (1.5) formulė.

DERINIŲ SKAIČIAUS FORMULĖ

1.3 teorema

Derinių iš n elementų po r skaičius

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad 0 \le r \le n . \tag{1.5}$$

Įrodymas. Imkime bet kurį r $(1 \le r \le n)$ elementų derinį iš n elementų aibės. Jau žinome, kad yra $r!$ tokio derinio perstatymo būdų. Taip perstatyti galime kiekvieną iš C_n^r derinių. Gausime $C_n^r \cdot r!$ gretinių. Kita vertus, bet kurį gretinį iš n elementų po r galime gauti iš kurio nors r elementų derinio. Todėl, remdamiesi 1.2 teorema, turime:

$$C_n^r \cdot r! = A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} .$$

Padaliję šią lygybę iš $r!$, gauname:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad 1 \le r \le n .$$

Liko neapskaičiuotas C_n^0 . Susitarkime, kad $C_n^0 =1$. Įsitikinsime, kad (1.5) formulė tinka ir šiuo atveju. Prisiminę, kad $0! = 1$ ir įrašę į (1.5) lygybę vietoj r reikšmę 0, gausime $C_n^0 = 1$. Taigi įrodomoji lygybė teisinga su visais $r = 0, 1, 2, ..., n$. ■

I š v a d a. Derinių iš n elementų po $n - r$ skaičius yra lygus derinių iš n elementų po r skaičiui, t.y.

$$C_n^{n-r} = C_n^r . \tag{1.6}$$

Įrodymas. Remkimės (1.3) teorema, imdami vietoj r skaičių $n - r$:

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^r . \quad ■$$

Išvadą galima įrodyti ir kitaip. Norint rasti, keliais būdais galima paimti r elementų iš n elementų aibės, galima suskaičiuoti, keliais būdais galima atmesti $n-r$ elementų iš tos pačios n elementų aibės.

1.11 uždavinys. Krepšinio komandoje yra 12 žaidėjų. Keliais būdais treneris gali iš jų pasirinkti startinį penketuką?

Sprendimas. Aišku, kad reikia rasti derinių iš 12 po 5 skaičių. Eilės tvarka, kuria treneris išvardys 5 žaidėjus, mūsų nedomina. Todėl trenerio pasirinkimų skaičius lygus

$$C_{12}^{5}=\frac{12!}{5!(12-5)!}=\frac{12!}{5!7!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 7!}=11\cdot 9\cdot 8=792\,. \quad \blacksquare$$

Pabrėžiame, kad (1.5) trupmeną visada galime suprastinti (tai jau darėme spręsdami 1.1 uždavinį):

$$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{r!(n-r)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)(n-r)!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!},$$

arba

$$C_n^r=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}=\frac{A_n^r}{r!}. \tag{1.7}$$

Ieškant derinių skaičiaus C_n^r, dažnai yra patogiau naudotis ne (1.5), o (1.7) formule. Pavyzdžiui, apskaičiuokime derinių iš 10 po 8 skaičių C_{10}^{8}:

$$C_{10}^{8}=C_{10}^{10-8}=C_{10}^{2}=\frac{10\cdot 9}{2!}=45.$$

Čia pirmojoje lygybėje naudojamės derinių savybe (1.6), o trečiąją lygybę gauname taikydami (1.7) formulę.

PASKALIO TAISYKLĖ

1.4 teorema

Teisinga lygybė $C_{n+1}^r=C_n^r+C_n^{r-1}$, $\quad 1\le r\le n$.

Ši lygybė vadinama Paskalio taisykle (*Blaise Pascal,* 1623–1662, prancūzų fizikas ir matematikas).

Įrodymas. C_{n+1}^r yra derinių iš $n+1$ elemento po r skaičius. Pasirinkime ir kaip nors pažymėkime kurį nors vieną elementą iš $n+1$ elemento aibės. Suskaičiuokime, kiek yra derinių po r elementų, į kuriuos patenka pasirinktasis elementas. Kadangi į minėtąjį derinį lieka paimti $r-1$ elementą iš n, tokių derinių bus C_n^{r-1}. Dabar apskaičiuokime, kiek yra derinių iš $n+1$ elemento po r, į kuriuos mūsų pažymėtasis elementas nepatenka. Tam iš likusių n elementų į derinį reikia paimti r elementų. Tokių derinių yra C_n^r. Visus galimus derinius iš $n+1$ po r suskirstykime į dvi grupes. Pirmąją grupę sudarys deriniai, į kuriuos pažymėtasis elementas pateks, antrąją grupę – deriniai, į kuriuos pažymėtasis elementas nepateks. Aišku, kad kitokių derinių nebus.

Sudėję pirmosios ir antrosios grupės derinių skaičių, gausime derinių iš $n+1$ elemento po r skaičių, t.y.

$$C_n^{r-1} + C_n^r = C_{n+1}^r . \quad \blacksquare$$

Čia pateikėme loginį Paskalio taisyklės įrodymą. Šią lygybę nesunkiai galima įrodyti ir remiantis (1.5) formule. Siūlome tai padaryti savarankiškai.

Paskalio taisyklė padeda sudaryti C_n^r reikšmių lentelę. Tokia lentelė vadinama Paskalio trikampiu. Pateikiamoje lentelėje yra Paskalio trikampio dalis nuo n = 0 iki n = 10. Eilutės atitinka n reikšmes, stulpeliai – r reikšmes, sankirtoje nurodyta C_n^r reikšmė.

	r										
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Kaip sudaroma ši lentelė? Pirmas ir paskutinis kiekvienos eilutės elementas yra lygus 1, nes $C_n^0 = C_n^n = 1$. Kiti elementai apskaičiuojami remiantis Paskalio taisykle: kiekvienas jų yra lygus sumai skaičiaus, esančio virš jo, ir skaičiaus, esančio virš jo kairėje. Pavyzdžiui, C_7^3 ieškome eilutėje n = 7 ir stulpelyje r = 3. Skaičius C_7^3 yra aštuntoje eilutėje ir ketvirtame stulpelyje. Jis lygus sumai skaičių, vienas kurių yra septintoje eilutėje ir ketvirtame stulpelyje, o kitas – septintoje eilutėje ir trečiame stulpelyje: $C_7^3 = C_6^3 + C_6^2 = 20 + 15 = 35$.

UŽDAVINIAI

21. Apskaičiuokite: C_9^6, C_{11}^4, C_{15}^6. Keliais būdais galima pažymėti 6 skaičius iš 49 loto kortelėje?

22. Keliais būdais galima išsirinkti 3 knygas iš 8 knygų?

23. Įstaiga pagal konkursą priims tris darbuotojus. Ji gavo 16 pareiškimų. Keliais būdais galima pasirinkti tris darbuotojus?

2. 4096

24. Mokesčių inspekcija nutarė patikrinti 20 iš 200 įmonių. Keliais būdais galima išrinkti tikrinamų įmonių dvidešimtuką?

25. Įstaiga nutarė priimti 6 naujus darbuotojus — dvi moteris ir keturis vyrus. Iš 16 kandidatų yra 5 moterys. Keliais būdais galima pasirinkti darbuotojus?

26. Išspręskite lygtį:

$$C_n^{12} = C_n^8 .$$

27. Išspręskite lygtį:

$$A_n^4 \, / \, C_{n-1}^3 = 60 .$$

28. Klasėje yra 20 mokinių. Kasdien 3 iš jų turi budėti. Kiek dienų galės budėti vis kitas trejetas. Kiek kartų per tas dienas teks budėti kiekvienam mokiniui?

29. Apskritime pažymėta 10 taškų. Kiek galima nubrėžti trikampių, kurių viršūnės būtų pažymėtuose taškuose? Kiek galima nubrėžti dešimtkampių?

30. Iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sudaromi šešiaženkliai skaičiai. Kiekvienas skaičius turi po 3 lyginius ir 3 nelyginius skaitmenis ir nė vienas skaitmuo skaičiuje nesikartoja. Kiek galima sudaryti tokių šešiaženklių skaičių?

31. Kiek įstrižainių turi iškilasis dvidešimtkampis? Raskite daugiakampio, turinčio 35 įstrižaines, kraštinių skaičių.

32. Tris vienos rūšies saldainius ir du kitos rūšies saldainius reikia padalyti dviem vaikams, kad kiekvienas jų gautų bent vieną saldainį. Keliais būdais tai galima padaryti?

33.* 9 kortelėse parašyti skaitmenys: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3. Kiek devyniaženklių skaičių galima sudaryti iš tų kortelių?

34.* Finalinėse krepšinio varžybose komandos A ir B žaidžia tarpusavyje tol, kol viena iš jų pasiekia 4 pergales. Sudaroma laimėjusių komandų pavadinimų seka (pavyzdžiui, seka $AABBAA$ reiškia, kad pirmąsias dvejas bei penktąsias ir šeštąsias rungtynes laimėjo komanda A, o trečiąsias ir ketvirtąsias – komanda B). Kiek tokių skirtingų sekų galima sudaryti, t.y. kiek skirtingų būdų gali vykti finalinės varžybos?

35.* Studentas dešimt savaičių turi laikyti po egzaminą kas savaitę. Du iš dešimties yra matematikos egzaminai. Kiek yra būdų sudaryti egzaminų laikymo eilę, kad matematikos egzaminų netektų laikyti vieną po kito?

1.4. NIUTONO BINOMAS

Algebroje dažnai vartojamos formulės, padedančios dviejų skaičių (pavyzdžiui, a ir b) sumą pakelti kuriuo nors natūraliuoju laipsniu. Dauguma jūsų žinote tapatybes

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 .$$

Pakelti binomą (lotynų kalba šis žodis reiškia dvinarį) $a + b$ aukštesniu laipsniu galima pagal vadinamąją Niutono binomo formulę (*Isaac Newton,* 1643–1727, žymus anglų matematikas ir fizikas). Pirmiausia sudauginkime kelis skirtingus binomus, vartodami raides su indeksais:

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1a_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + b_1b_2;$$

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) =$$

$$= a_1a_2a_3 + a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + a_1b_2b_3 + b_1a_2a_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3 + b_1b_2b_3.$$

Matome tokius dėsningumus:

1. Kiekvienas lygybės dešiniosios pusės dėmuo turi tiek dauginamųjų, kiek binomų dauginame.

2. Kiekvieno dėmens dauginamųjų indeksai yra 1, 2 ir 3. Tai reiškia, kad kiekviena sandauga (pavyzdžiui, $a_1b_2a_3$) turi po dauginamąjį iš kiekvieno binomo.

3. Reiškinys dešiniojoje lygybės pusėje yra visų galimų sandaugų, turinčių pirmąją ir antrąją savybes, suma.

Jei išnagrinėtose sandaugose praleisime indeksus ir sutrauksime panašiuosius narius, gausime formules $(a + b)^2$ ir $(a + b)^3$ apskaičiuoti. Remdamiesi 1-uoju, 2-uoju ir 3-iuoju dėsningumu, pamėginkime apskaičiuoti $(a + b)^4$. Kadangi

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b),$$

tai kiekvienas sandaugos narys yra ketvirtojo laipsnio skaičių a ir b atžvilgiu. Todėl visi galimi nariai yra

$$a^4,\ a^3b,\ a^2b^2,\ ab^3,\ b^4.$$

Raskime šių narių koeficientus. Narį a^4 gauname, kai iš kiekvieno binomo imame dauginamąjį a. Tai padaryti galima vieninteliu būdu, todėl ir nario a^4 koeficientas bus 1. Narį a^3b gauname, kai iš kurio nors vieno binomo imame dauginamąjį b, o iš kitų trijų – dauginamuosius a. Tą binomą, iš kurio imame b, galima pasirinkti $C_4^1 = 4$ būdais. Todėl narys a^3b sumoje atsiras 4 kartus. Panašiai narį a^2b^2 galime gauti C_4^2 būdais, narį ab^3 – C_4^3 būdais, narį b^4 – C_4^4 būdais. Taigi

$$(a + b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Dabar šią formulę apibendrinkime.

1.5 teorema (Niutono binomas)

Su bet kuriuo natūraliuoju n yra teisinga lygybė

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^ra^{n-r}b^r + \ldots + C_n^nb^n.$$

Įrodymas. Kiekvienas dešinės lygybės pusės narys yra n-tojo laipsnio a ir b atžvilgiu. Todėl visi dėmenys be koeficientų yra tokie:

$$a^{n-r}b^r, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Narį $a^{n-r}b^r$ gausime, iš r binomų paėmę b. Kaip jau žinome, tai galima padaryti C_n^r būdų. Iš visų likusių binomų reikės imti dauginamąjį a (vieninteliu būdu). Todėl koeficientas prie $a^{n-r}b^r$ bus C_n^r. Taigi kiekvienas dėmuo, gautas sutraukus panašiuosius narius, atrodys taip:

$$C_n^r a^{n-r} b^r, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, n. \quad \blacksquare$$

Į Niutono binomo formulę galime įrašyti C_n^r išraiškas ((1.7) formulė, p. 16). Kadangi

$$C_n^0 = 1,\ C_n^1 = n,\ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!},\ C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\ \text{ir t.t.},$$

tai Niutono binomo formulė atrodo šitaip:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n. \quad (1.8)$$

1.12 uždavinys. Atskliauskite reiškinį $(2 + x)^4$.

Sprendimas. Remiamės (1.8) formule:

$$(2+x)^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 x + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot 2^2 x^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2x^3 + x^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4. \blacksquare$$

1.13 uždavinys. Atskliauskite reiškinį $(1 - 2x^2)^5$.

Sprendimas. Vėl taikome (1.8) formulę:

$$(1-2x^2)^5 = (1+(-2x^2))^5 = 1 + 5(-2x^2) + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}(-2x^2)^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(-2x^2)^3 +$$

$$+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot(-2x^2)^4 + (-2x^2)^5 = 1 - 10x^2 + 40x^4 - 80x^6 + 80x^8 - 32x^{10}. \quad \blacksquare$$

1.14 uždavinys. Įrodykite, kad

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Sprendimas. Niutono binomo formulėje įrašykime $a = b = 1$. Gauname:

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n. \quad \blacksquare$$

APYTIKSLĖS FORMULĖS

1.15 uždavinys. Jei nx yra artimas nuliui, tai

$$(1+x)^n \approx 1 + nx. \quad (1.9)$$

Įrodykite tai.

Sprendimas. Primename, kad ženklas $\approx$ reiškia apytikslę lygybę. Vėl naudosimės (1.8) formule, kai $a = 1$, o $b = x$. Pirmieji du dėmenys duoda reikiamą rezultatą, o tolesni nariai yra

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2,\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3,\quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 \quad (1.10)$$

ir t.t. Kadangi $n(n-1) < n \cdot n = n^2$, $n(n-1)(n-2) < n^3$, $n(n-1)(n-2)(n-3) <$ $< n^4$, tai reiškinių (1.10) moduliai bus mažesni už skaičių

$$\frac{n^2x^2}{2!},\quad \frac{n^3x^3}{3!},\quad \frac{n^4x^4}{4!}$$

ir t.t. modulius. Jei nx artimas nuliui, tai aukštesni nx laipsniai bus maži, palyginti su nx. Todėl galima rašyti: $(1+x)^n \approx 1 + nx$. ■

Pavyzdys. Apytiksliai apskaičiuokime $(1{,}002)^{10}$. Remkimės (1.9) formule:

$$(1{,}002)^{10} = (1 + 0{,}002)^{10} \approx 1 + 10 \cdot 0{,}002 = 1{,}02.$$

Palyginimui pateikiame 8 tikslius skaitmenis po kablelio: $(1{,}002)^{10} \approx$ $\approx 1{,}020180963$. ■

Apytikslę formulę (1.9) galėtume taikyti daug drąsiau, jei žinotume paklaidos dydį. Nesunku įrodyti tokį teiginį:

Jei $|nx| \leq 1$, tai (1.9) apytikslės lygybės paklaida yra ne didesnė už $(nx)^2$, t.y.

$$|(1+x)^n - (1+nx)| \leq (nx)^2.$$

Šį teiginį siūlome skaitytojui įrodyti savarankiškai. Iš jo išplaukia, kad (1.9) formulė yra tuo tikslesnė, kuo mažesnis skaičiaus nx modulis.

UŽDAVINIAI

36. Kiek dėmenų yra binomo $(m+n)^{100}$ skleidinyje? Parašykite tris pirmuosius narius.

37. Raskite binomo $(1+x)^{50}$ skleidinio 20-ąjį narį ir koeficientą prie x^{10}.

38. Atskliauskite:

$$\left(\frac{1}{2}a+1\right)^6, \quad (x^2-x^3)^6, \quad (3-6a)^5, \quad \left(1-\frac{1}{2}x\right)^5.$$

39. Remdamiesi (1.9) formule, apytiksliai apskaičiuokite $0{,}997^{20}$ ir $1{,}004^5$. Jei turite gerą skaičiuoklį, apskaičiuokite juo šių reiškinių reikšmes. Gautus rezultatus palyginkite.

40*. Įrodykite, kad, kintant r nuo 1 iki n, skaičiai C_n^r iš pradžių didėja, po to mažėja, o didžiausi yra sekos viduryje. Kitaip sakant, įrodykite, kad

$$C_{2k}^0 < C_{2k}^1 < \dots < C_{2k}^k, \quad C_{2k}^k > C_{2k}^{k+1} > \dots > C_{2k}^{2k},$$

$$C_{2k+1}^0 < C_{2k+1}^1 < \dots < C_{2k+1}^k = C_{2k+1}^{k+1},$$

$$C_{2k+1}^{k+1} > C_{2k+1}^{k+2} > \dots > C_{2k+1}^{2k+1}.$$

41*. Raskite skleidinio $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^n$ didžiausią narį.

42*. Įrodykite paskutinį skyrelio teiginį: jei $|nx| < 1$, tai (1.9) nelygybės paklaida ne didesnė už $(nx)^2$. (N u r o d y m a s. Išskleiskite binomą, prieš skliaustus iškelkite $(nx)^2$, o suskliaustus dėmenis įvertinkite naudodamiesi nelygybėmis:

$$|nx| \leq 1, \quad \frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3} \quad \text{ir t.t.})$$

1.5. SUMOS ŽENKLAS Σ

Sprendžiant matematikos uždavinius, analizuojant fizikos eksperimentų rezultatus, renkant ir apdorojant statistinius duomenis, gana dažnai tenka sumuoti daug skaičių. Sakysime, kad rugsėjo mėnesį fiksuojame vidutinę paros oro temperatūrą ir mus domina vidutinė mėnesio temperatūra. Ją sužinosime visų paros temperatūrų sumą padalijęs iš 30. Tarkime, kad t_1 – rugsėjo pirmosios dienos oro temperatūra, t_2 – antrosios, t_3 – trečiosios ir t.t., t_{30} – trisdešimtosios dienos temperatūra. Pavyzdžiui, galėtų būti $t_1 = 13$, $t_2 = 10$, $t_3 = 11$ ir t.t. Šių trisdešimties skaičių sumą galime užrašyti taip:

$$t_1 + t_2 + ... + t_{30}. \qquad (1.11)$$

Daugtaškis, kaip jau įprasta, vartojamas vietoj pasakymo „ir t.t." Būtų patogu (1.11) sumą užrašyti dar glausčiau. Tam paprastai vartojama graikiška raidė Σ („sigma" didžioji), žyminti sumą. (1.11) suma užrašoma taip:

$$t_1 + t_2 + ... + t_{30} = \sum_{i=1}^{30} t_i . \qquad (1.12)$$

(1.12) lygybės dešiniojoje pusėje parašytą reiškinį skaitome šitaip: suma visų t_i nuo i, lygaus 1, iki i, lygaus 30. Kitaip sakant, užrašas

$$\sum_{i=1}^{30} t_i$$

reiškia, kad vietoj raidės i paeiliui įrašomi sveikieji skaičiai nuo 1 iki 30 ir skaičiai t_i sudedami. Indeksai gali būti žymimi ne tik raide i, bet ir kitomis raidėmis. Dažniausiai sumavimo indeksai žymimi raidėmis i, j, k, n.

Pavyzdys. Sakykime, kad $t_1 = -5$, $t_2 = 3$, $t_3 = 6$, $t_4 = 1$. Apskaičiuosime

$$\text{a)} \sum_{i=1}^{4} t_i ; \quad \text{b)} \sum_{i=2}^{4} t_i ; \quad \text{c)} \sum_{j=1}^{3} t_j ; \quad \text{d)} \sum_{j=1}^{4} 5t_j ;$$

$$\text{e)} \sum_{k=1}^{3} (t_k + t_{k+1}); \quad \text{f)} \sum_{k=1}^{4} t_k^2 ; \quad \text{g)} \sum_{k=1}^{4} (t_k - 1).$$

Sprendimas.

$$\text{a)} \sum_{i=1}^{4} t_i = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -5 + 3 + 6 + 1 = 5 ;$$

$$\text{b)} \sum_{i=2}^{4} t_i = t_2 + t_3 + t_4 = 3 + 6 + 1 = 10;$$

c) $\sum_{j=1}^{3} t_j = t_1 + t_2 + t_3 = -5 + 3 + 6 = 4;$

d) $\sum_{j=1}^{4} 5t_j = 5t_1 + 5t_2 + 5t_3 + 5t_4 = 5(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = 5 \cdot 5 = 25;$

e) $\sum_{k=1}^{3} (t_k + t_{k+1}) = (t_1 + t_2) + (t_2 + t_3) + (t_3 + t_4) =$

$= (-5 + 3) + (3 + 6) + (6 + 1) = -2 + 9 + 7 = 14;$

f) $\sum_{k=1}^{4} t_k^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 = (-5)^2 + 3^2 + 6^2 + 1^2 = 71;$

g) $\sum_{k=1}^{4} (t_k - 1) = (t_1 - 1) + (t_2 - 1) + (t_3 - 1) + (t_4 - 1) =$

$= (-5 - 1) + (3 - 1) + (6 - 1) + (1 - 1) = 1.$

Paaiškinsime sprendimą. Sumoje b) užrašas $i = 2$ po sumos ženklu rodo sumavimo indekso i reikšmę, nuo kurios pradedama sumuoti. Po to indeksui suteikiamos reikšmės 3 ir 4. Užrašas $i = 4$ virš sumos ženklo rodo paskutinę indekso i reikšmę. Taigi kintamojo t_i indeksas keičiamas į 2, 3 ir 4 ir atitinkamos t_i reikšmės sudedamos:

$$t_2 + t_3 + t_4 .$$

c) sumoje sumavimo indeksas žymimas raide j ir jam suteikiamos reikšmės 1, 2 ir 3.

d) sumoje kiekvienas dėmuo dauginamas iš 5. Tą bendrą daugiklį galime iškelti prieš skliaustus.

e) sumoje indeksas k įgyja reikšmes 1, 2, 3, o indeksas k+1 – reikšmes 2, 3 ir 4. ■

Sakykime, kad indekso i reikšmės yra sveikieji skaičiai nuo m iki n ir su kiekviena iš minėtų i reikšmių yra duotas skaičius t_i (nebūtinai sveikasis). Tada visų kintamųjų t_i suma

$$t_m + t_{m+1} + \ldots + t_{n-1} + t_n$$

užrašoma taip:

$$\sum_{i=m}^{n} t_i = t_m + t_{m+1} + \ldots + t_n.$$

Sumavimo kintamasis taip pat žymimas įvairiai. Vietoj t_i dažnai rašoma a_i , b_i , x_i , y_i , z_i ir kitos raidės. ■

UŽDAVINIAI

Apskaičiuokite:

43. $\sum_{k=1}^{4}(k-2)$.

44. $\sum_{y=1}^{5}(3y-4)$.

45. $\sum_{y=1}^{4}(y^2-4y+1)$.

46. $\sum_{i=1}^{100}4$.

47. $\sum_{i=0}^{4}2^i$.

48. $\sum_{k=0}^{5}p^k$.

49. $\sum_{k=1}^{4}(k+a)+1$.

50. $\sum_{x=2}^{4}(x+1)^2$.

51. $\sum_{y=1}^{4}y^3$.

52. $\sum_{y=0}^{5}(x^2+y^2)$.

2 SKYRIUS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS PRADMENYS

Kiekvienas iš mūsų beveik kasdien susiduriame su žodžiais *tikimybė, atsitiktinis įvykis, atsitiktinumas* ir t.t. Štai girdime orų prognozę: „Lietaus nesitikima“ arba „Lietaus tikimybė maža“. Kitą kartą girdime sakant: „Atsitiktinai sugedo autobusas, ir aš pavėlavau į mokyklą“. Iš tikrųjų sunkoka būtų tiksliai prognozuoti, ar lis ateinančių metų rugsėjo 1 dieną. Tačiau meteorologas gali pasakyti vidutinį daugiametį lietingų dienų skaičių Lietuvoje, o statistikos ar tikimybių teorijos specialistas galės pasakyti, kad vidutiniškai 95 atvejais iš 100 ateinančiais metais lietingų dienų bus ne mažiau kaip n_1 ir ne daugiau kaip n_2, o skaičiai n_1 ir n_2 visai nedaug skirsis nuo vidutinio daugiamečio lietingų dienų skaičiaus. Panašiai sunku pasakyti, ar kuris nors konkretus automobilis pateks į avariją. Tačiau skaičius avarijų, per metus tenkantis 1000 automobilių, yra pakankamai pastovus. Minėti pavyzdžiai rodo, kad ir atsitiktiniai įvykiai paklūsta tam tikriems dėsniams. Tokius dėsnius nagrinėja tikimybių teorija ir matematinė statistika.

Šiuolaikinė tikimybių teorija – ypač sparčiai besivystanti matematikos šaka. Tai sąlygoja platus tikimybių teorijos ir matematinės statistikos taikymas kituose moksluose – fizikoje, biologijoje, medicinoje, genetikoje, sociologijoje, karo moksle, eilių teorijoje – ir praktikoje.

Tikimybių teorija, kaip ir kiekvienas kitas mokslas, nagrinėja ne visą įvairią ir sudėtingą tikrovę, o tik kurią nors vieną jos pusę. Sudaroma ir analizuojama tam tikra schema (modelis), kuri tiksliau ar ne taip tiksliai atspindi mus dominančią tikrovės sritį. Pavyzdžiui, geometrija tiria figūrų, taškų ir tiesių savybes. Tikrovėje tokių figūrų nėra, todėl ir tiriami modeliai – kurios nors srities modeliavimo, schematizavimo rezultatas.

Tikimybių teorija nagrinėja tokį realių reiškinių modelį: atliekamas bandymas, kurio rezultatai yra atsitiktiniai įvykiai (kartais sakoma tiesiog įvykiai). Pavyzdžiui, metame monetą ir žiūrime, kaip ji nukrito, t.y. atliekame bandymą. Šiame bandyme galėjo atsiversti herbas – tai vienas įvykis; bet galėjo atsiversti ir skaičius – tai kitas įvykis. Kadangi niekas negali iš anksto pasakyti, kuria puse atsivers moneta, tai sakoma, kad herbo atsivertimas yra atsitiktinis įvykis. Tikimybių teorija dažniausiai taikoma bandymams, kurie gali būti daug kartų kartojami tomis pačiomis sąlygomis (pavyzdžiui, didelio skaičiaus kurių nors detalių gamyba).

Pirmieji elementarūs uždaviniai apie monetos ar visiems žinomo lošimo kauliuko mėtymą gali pasirodyti nelabai rimti. Tačiau reikia turėti omenyje, kad tikimybių teorija pradėjo plėtotis XVI–XVII amžiuje sprendžiant

uždavinius, susijusius su lošimu kauliukais. Todėl juokaujama, kad primityvus lošimas kauliukais davė pradžią sudėtingai žmogui labai svarbiai mokslo šakai, o turiningasis žaidimas šachmatai mokslo istorijoje jokio vaidmens nesuvaidino.

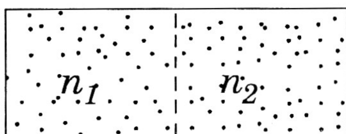
2.1. TIKIMYBINIŲ UŽDAVINIŲ PAVYZDŽIAI. ATSITIKTINIAI ĮVYKIAI

Pateiksime keletą tikimybių teorijos taikymo pavyzdžių.

2.1 pavyzdys. Jau minėjome, kad pirmieji tikimybiniai uždaviniai atsirado sprendžiant uždavinius, susijusius su lošimu kauliukais. XVII amžiuje pagarsėjo prancūzų filosofas ir literatas Š. Merė (*Chevalier de Meray*, 1607–1648). Kalbama, kad jis siekė praturtėti lošdamas kauliukais. Tuo tikslu sugalvodavo įvairių sudėtingesnių lošimo taisyklių. Vienas iš jo sugalvotų lošimų buvo toks. Kauliukas metamas keturis kartus. Jei bent vieną kartą pasirodo šešetas, tai laimi Merė. Jei šešetas neiškrenta nė karto, laimi jo priešininkas. Vėliau išmoksime apskaičiuoti, ar verta būtų lošti šį žaidimą su Merė. Kitas istorinis Merė uždavinys buvo toks: kokia akučių suma — 11 ar 12 — gaunama dažniau, metant iš karto tris kauliukus? Šie uždaviniai išliko istorijoje, nes Š. Merė susirašinėjo su B. Paskaliu, kuris jau mokėjo tokius uždavinius spręsti. ■

2.2 pavyzdys. Jau XVII amžiaus pabaigoje tikimybių teorija pasitelkiama draudžiant laivus nuo nelaimių. Buvo apskaičiuojama tikimybė, kad laivas grįš į uostą nepatyręs nelaimių, kad jo nepaskandins audra, neužpuls piratai ir t.t. Tokie skaičiavimai padėdavo nustatyti, kokią draudimo sumą turi mokėti laivo savininkas, kad, įvykus nelaimei, gautų norimą kompensaciją. Tikimybinius metodus labai plačiai taiko ir dabartinės draudimo kompanijos. ■

2.3 pavyzdys. Jau XIX amžiuje daugelis fizikų pradėjo taikyti tikimybių teoriją tirdami sistemas, susidedančias iš daugelio atomų ar molekulių. Sakykime, kad galime stebėti inde idealiųjų (išretintų) dujų molekules.



2.1 pav. Indas su idealiosiomis dujomis, perskirtas įsivaizduojamos plokštumos

Kairiojoje indo pusėje esančių molekulių skaičių pažymėkime n_1, o dešiniojoje pusėje – n_2. Jei inde molekulių yra pakankamai daug, tai paprastai $n_1 \approx n_2$. Molekulės netvarkingai juda, todėl skaičiai n_1 ir n_2 keičiasi: pradedant stebėti, gali būti $n_1 > n_2$, o po kurio laiko — jau $n_2 > n_1$. Molekulių esant „pakankamai" daug, pavyzdžiui, $N = n_1 + n_2 = 80$, mums greičiausiai niekada netektų pamatyti visų molekulių, susirinkusių vienoje pusėje, nors niekas joms netrukdo to padaryti. Norint aprašyti molekulių pasiskirstymą inde,

laikoma, kad kiekviena molekulė turi tiek pat galimybių būti ir kairiojoje, ir dešiniojoje pusėje. Tada tikimybė, kad visos molekulės susirinks kairiojoje pusėje, yra teigiama. Bet kokia ji? Gana nesunkiai apskaičiuojama, kad ši tikimybė lygi $2^{-80} \approx 10^{-24}$. Tai reiškia, kad mus dominanti padėtis susidarytų vidutiniškai vieną kartą iš 10^{24} molekulių padėties stebėjimų. Jei per sekundę galėtume padaryti milijoną molekulių indo nuotraukų, tai 10^{24} nuotraukų tektų daryti kur kas ilgesnį laiką nei visatos amžius. Tačiau ir padarę tiek nuotraukų, negalėtume būti tikri turį nuotrauką, kurioje visos molekulės yra kairiojoje pusėje. Taip pat ir mesdami lošimo kauliuką šešis kartus, negalime būti tikri, kad bent vieną kartą atsivers šešetas. Tik šio įvykio tikimybė jau yra pakankamai didelė. Čia „stebėjome" tik 80 molekulių, o jei prisiminsime, kad viename kubiniame centimetre yra maždaug $2{,}5 \cdot 10^{19}$ oro molekulių... Dabar galime suvokti, kodėl daug molekulių turinčių sistemų negalima apibūdinti atsižvelgiant į kiekvienos molekulės judėjimą. Tikimybių teorijos dėsniai padeda aprašyti tiek molekulių, tiek elementariųjų dalelių sistemas. ■

2.4 pavyzdys. Eilių teorija. Daugelis iš mūsų negali išsiversti be parduotuvės, kirpyklos, poliklinikos, ryšių įstaigų paslaugų. Kyla klausimas: kaip bus tenkinami mūsų poreikiai, jei yra įrengta n aptarnavimo vietų (n kasų parduotuvėje, n vietų kirpykloje ir t.t.). Atrodytų, kad uždavinys beviltiškas: nerealu tikėtis sužinoti, kuriais laiko momentais ateis kiekvienas lankytojas, kiek laiko prireiks jam aptarnauti. Tačiau, pasirodo, kad, nustačius vidutinį lankytojų srauto intensyvumą ir vidutinį aptarnavimo laiką, galima gana patikimai sužinoti, ar įstaigoje kaupsis eilė, ar jos darbuotojai neturės ką veikti. Juk per didelis aptarnavimo vietų (pavyzdžiui, telefono linijų, kasos aparatų) skaičius taip pat yra nuostolingas. ■

Čia pateikti pavyzdžiai toli gražu neatspindi visų tikimybių teorijos taikymo sričių. Norint plačiau suvokti šios matematikos šakos galimybes, reikia susipažinti su kai kuriomis sąvokomis ir teiginiais.

Viena iš pradinių tikimybių teorijos sąvokų yra atsitiktinio įvykio sąvoka. Sakykime, atliekame tokius bandymus.

1. Imame akmenį ir metame jį aukštyn. Akmuo greičiausiai nukris žemėn.
2. Galime stebėti, ar patekės saulė. Greičiausiai taip ir atsitiks.
3. Patikrinkime, ar dega parduotuvėje pirkta elektros lemputė. Ji gali šviesti, tačiau gali ir nešviesti – pasitaikyti nekokybiška.
4. Metame lošimo kauliuką ir stebime, ar pasirodys šešetas. Aišku, jis gali atsiversti, bet gali ir neatsiversti.
5. Loterijos bilietas, kurį perkame, gali laimėti, bet gali ir nelaimėti.

Nesunku suvokti, kad 1 ir 2 pavyzdyje minėti įvykiai skiriasi nuo 3, 4 ir 5 pavyzdžiuose nusakytų įvykių. Pirmieji visada įvyksta. Tokie įvykiai vadinami **būtinaisiais**. Antra pavyzdžių (3, 4, 5) grupė – įvykiai, kurie tomis pačiomis sąlygomis gali įvykti arba neįvykti. Tokie įvykiai vadinami **atsitiktiniais**. Kaip tik jie ir yra tikimybių teorijos tyrimų objektas.

2.2. ĮVYKIO TIKIMYBĖS APIBRĖŽIMAS

Sakykime, metame į viršų monetą. Iškrenta herbas. Tačiau mūsų intuicija sako, kad lygiai taip pat galėjo iškristi ir skaičius. Todėl natūralu laikyti, kad herbo ir skaičiaus iškritimas metant monetą yra vienodai galimi įvykiai. Aišku, moneta turi būti simetriška ir vienalytė.

Visi matėme šešiasienį lošimo kauliuką. Dauguma žmonių sutinka su tuo, kad, metant kauliuką, bet kurios sienos atsivertimas yra vienodai galimas. Todėl laikome, kad yra šešios vienodai galimos kauliuko metimo baigtys: atsivertė viena akutė, dvi akutės, trys akutės ir t.t.

Tikimybių teorijoje terminas „bandymas" dažniausiai reiškia tomis pačiomis sąlygomis kartojamą veiksmą, kurio rezultato negalima nusakyti vienareikšmiškai, t.y., atliekant bandymą, įvyksta atsitiktinis įvykis. Bandymų pavyzdžiai: vienos ar kelių monetų metimas, lošimo kauliuko metimas, atsitiktinis 3 žmonių parinkimas iš 30 žmonių grupės. Šis bandymas suprantamas taip. Iš visų galimų būdų išrinkti 3 žmones iš 30 (tai yra derinių iš 30 po 3, kurių yra $C_{30}^3 = 4060$) atsitiktinai išrenkame vieną derinį. „Atsitiktinai" šiuo atveju reiškia tokį išrinkimą, kai kiekvienas iš 4060 derinių turi vienodai galimybių būti išrinktu.

Dabar apibrėšime žodį „tikimybė" kaip specialų terminą. Po to pateiksime klasikinį tikimybės apibrėžimą. Grįžkime prie monetos metimo. Kasdiene kalba galėtume pasakyti, kad atsiversti herbui yra viena galimybė iš dviejų. Tikimybių teorijoje sakoma: herbo atsivertimo tikimybė yra $\frac{1}{2}$. Simboliais tai užrašoma taip:

$$\mathbf{P}\text{ („Atsivertė herbas")} = \frac{1}{2}.$$

Raidė **P** tikimybei žymėti vartojama greičiausiai todėl, kad lotynų kalba *probabilitas* reiškia tikimybę. Panašiai šis žodis skamba angliškai, prancūziškai.

Metant lošimo kauliuką, šešiomis akutėmis paženklinta siena turi vieną galimybę iš šešių atsidurti viršuje. Lygiai tiek pat galimybių – vieną iš šešių – turi ir bet kuri kita siena. Simboliškai užrašome taip:

$$\mathbf{P}\text{ („Iškrito šešios akutės")} = \frac{1}{6}.$$

Tikimybė iš 30 žmonių atsitiktinai išrinkti tris konkrečius žmones *A, B* ir *C* yra lygi

$$\mathbf{P}(A,B,C) = \frac{1}{C_{30}^3} = \frac{1}{4060}.$$

Norint išspręsti uždavinį tikimybių teorijos priemonėmis, dažniausiai jau iš anksto reikia žinoti tam tikrų įvykių tikimybes. Jas gali pateikti konkretūs mokslai, kuriuose kilo nagrinėjamas uždavinys. Tuomet pagrindinis vaidmuo dažnai tenka ne matematiniams, o to mokslo samprotavimams. Kita vertus,

kai kurių įvykių tikimybės yra uždavinio išankstinės prielaidos. Reikia pabrėžti, kad lygių galimybių būdas – anaiptol ne vienintelis įvykių tikimybių nusakymo būdas.

Tarkime, kad mus domina įvykio A = „Iškrito lyginis akučių skaičius“ tikimybė. Šis įvykis įvyks, jei įvyks vienas iš šių trijų įvykių:

„Iškrito dvi akutės“,

„Iškrito keturios akutės“,

„Iškrito šešios akutės“.

Taigi mus dominančiam įvykiui yra palankios trys galimybės iš šešių. Todėl to įvykio tikimybė bus lygi

$$\mathbf{P}\,(\text{„Iškrito lyginis akučių skaičius“}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Matome, kad kai kurie įvykiai yra sudaryti iš keleto „smulkesnių“ įvykių. Tačiau yra įvykių, kurie neskaidomi ir negali įvykti kartu. Pavyzdžiui, metant kauliuką, tuo pačiu metu negali iškristi dvi ir trys akutės. Tokie neskaidomi įvykiai vadinami **elementariaisiais įvykiais.** Kurio nors bandymo elementariųjų įvykių visuma vadinama **elementariųjų įvykių aibe**. Šiame bandyme elementariaisiais laikysime šešis įvykius:

E_1 = „Iškrito 1 akutė“, E_2 = „Iškrito 2 akutės“,

E_3 = „Iškrito 3 akutės“, E_4 = „Iškrito 4 akutės“,

E_5 = „Iškrito 5 akutės“, E_6 = „Iškrito 6 akutės“.

Pabrėžiame, kad kol kas nagrinėsime tik tokius bandymus, kuriuose visų elementariųjų įvykių tikimybės yra lygios. Mūsų pavyzdyje

$$\mathbf{P}(E_1) = \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_3) = \mathbf{P}(E_4) = \mathbf{P}(E_5) = \mathbf{P}(E_6) = \frac{1}{6}.$$

Skaičiuodami įvykio A = „Iškrito lyginis akučių skaičius“ tikimybę, „surinkome“ tuos elementariuosius įvykius, kuriems įvykstant įvyksta ir mus dominantis įvykis. Tokie įvykiai vadinami palankiais nagrinėjamam įvykiui. Šiuo atveju įvykiai E_2, E_4 ir E_6 yra palankūs įvykiui A. Įvykio A tikimybę skaičiuojame šitaip:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{palankių įvykiui } A \text{ elementariųjų įvykių skaičius}}{\text{visų galimų elementariųjų įvykių skaičius}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

KLASIKINIS TIKIMYBĖS APIBRĖŽIMAS

2.1 apibrėžimas

Tarkime, kad bandymo baigtis gali būti vienas iš n skirtingų, vienodai galimų elementariųjų įvykių. Jei yra m įvykiui A palankių elementariųjų įvykių, tai įvykio A tikimybe vadinamas skaičius

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}. \qquad (2.1)$$

2.1 uždavinys. Loterijoje yra 1000 bilietų. 300 iš jų laimi. Atsitiktinai traukiamas vienas bilietas. Kokia tikimybė, kad jis yra laimingas?

Sprendimas. Tarkime, kad bet kurio bilieto ištraukimo galimybės yra vienodos. Skirtingų bandymo baigčių, tiksliau, elementariųjų įvykių, šiame pavyzdyje yra 1000 (n = 1000). Mus dominančiam įvykiui A = „Ištrauktas bilietas yra laimingas" palankių elementariųjų įvykių yra 300 (m = 300). Tada

$$\mathbf{P}(A) = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10}. \quad \blacksquare$$

2.2 uždavinys. Parduotuvės lentynoje netvarkingai sudėtos nevienodos galios, bet vienodai atrodančios lemputės. Žinoma, kad 100 W galios lempučių yra 200, 60 W galios – 50 ir 25 W galios – 100. Nesirinkdami imame vieną lemputę. Kokia tikimybė, kad ji bus 100 W galios? 60 W galios? 25 W galios?

Sprendimas. Šiame pavyzdyje n = 200 + 50 + 100 = 350. Mus dominančius įvykius, reiškiančius 100 W, 60 W ir 25 W galios lemputės paėmimą, pažymėkime atitinkamai A, B ir C. Matome, kad

$$\mathbf{P}(A) = \frac{200}{350} = \frac{4}{7}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{50}{350} = \frac{1}{7}, \quad \mathbf{P}(C) = \frac{100}{350} = \frac{2}{7}. \quad \blacksquare$$

2.2 apibrėžimas

Visi bandymo elementarieji įvykiai, kurie nėra palankūs įvykiui A, sudaro įvykiui A priešingą įvykį $\overline{A}$.

Kitaip tariant, įvykiui A priešingas įvykis $\overline{A}$ įvyksta tada ir tik tada, kai įvykis A neįvyksta.

Sakykime, kad iš n įvykių yra m įvykiui A palankių elementariųjų įvykių. Tada iš n įvykių yra $n - m$ įvykiui $\overline{A}$ palankių įvykių. Matome, kad priešingo įvykio tikimybė

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - \mathbf{P}(A),$$

arba

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}). \tag{2.2}$$

2.5 pavyzdys. Metame lošimo kauliuką. Apskaičiuosime įvykio

A = „Iškrito daugiau kaip 2 akutės"

ir jam priešingojo įvykio $\overline{A}$ tikimybes. Įvykį $\overline{A}$ galime taip nusakyti:

$\overline{A}$ = „Iškrito ne daugiau kaip 2 akutės".

Jam palankūs du elementarieji įvykiai, todėl

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Dabar, remdamiesi (2.2) lygybe, gauname:

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \quad \blacksquare$$

2.6 pavyzdys. Tarkime, kad mūsų bandymas yra dviejų lošimo kauliukų metimas. Kauliukai skirtingi: vienas raudonas, kitas – baltas. (Atlikti šį bandymą galima ir su vienu kauliuku. Pirmas metimas atitiktų raudonojo kauliuko metimą, o antras – baltojo.) Parašykime visas galimas šio bandymo baigtis, t.y. sudarykime elementariųjų įvykių aibę. Elementariuosius įvykius žymėkime skaičių pora. Pirmasis reiškia raudonojo kauliuko metimo rezultatą, antrasis – baltojo. Visus elementariuosius įvykius surašykime lentelėje:

2.1 lentelė

r	b					
	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Pora (3,4) žymi elementarųjį įvykį: „Raudonojo kauliuko iškrito 3 akutės, baltojo – 4 akutės". Matome, kad iš viso yra $6 \cdot 6 = 36$ elementarieji įvykiai.

Galime ir kiek kitaip nurodyti elementariųjų įvykių aibę. Tai aibė skaičių porų (r, b), kurių r ir b įgyja reikšmes 1, 2, 3, 4, 5, 6:

$$E = \{ (r, b):\ r = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ \ b = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}.$$

Pagrindinė mūsų prielaida šiame bandyme yra visiškas kauliukų simetriškumas ir vienalytiškumas. Metame kauliuką taip pat „atsitiktinai", o ne šiaip padedame. Šios prielaidos ir reiškia, kad kiekvieno elementariojo įvykio tikimybė yra $\frac{1}{36}$. Apskaičiuosime įvykių, susijusių su šiuo bandymu, tikimybes:

A = „Abiejų kauliukų iškrito vienodas akučių skaičius",

B = „Baltojo kauliuko iškritusių akučių skaičius bent trimis didesnis už raudonojo",

C = „Abiejų kauliukų iškritusių akučių skaičių suma lygi 10".

Dažnai būna patogu įvykius nusakyti ne žodžiais, o simboliais. Šiame uždavinyje įvykį A galime simboliškai užrašyti formule „$r = b$", įvykį B – „$b \geq r + 3$", C – „$r + b = 10$". Sprendimą pateiksime lentelėje:

Įvykis	Žodinis aprašymas	Užrašas simboliais	Palankūs elementarieji įvykiai	Įvykio tikimybė
A	Akučių skaičiai lygūs	$r = b$	(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
B	Baltojo kauliuko akučių skaičius bent trimis didesnis už raudonojo	$b \geq r + 3$	(1,4), (1,5), (1,6), (2,5), (2,6), (3,6)	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
C	Akučių skaičių suma lygi 10	$r + b = 10$	(4,6), (5,5), (6,4)	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Dabar jau aiškėja panašių uždavinių sprendimo etapai.

1. Elementariųjų įvykių aibės sudarymas.
2. Elementariųjų įvykių skaičiaus n radimas.
3. Palankių nagrinėjamam įvykiui elementariųjų įvykių skaičiaus radimas.
4. Įvykio tikimybės radimas, remiantis (2.1) lygybe. ■

2.3 uždavinys. Dėžėje yra 10 vienodo didumo rutulių: 7 iš jų balti ir 3 juodi. Nesirenkant (nežiūrint) vienas jų išimamas . Kokia tikimybė, kad tai bus baltas rutulys?

Sprendimas. Uždavinyje nagrinėjamas toks bandymas: iš dėžės nesirenkant išimamas rutulys ir pažiūrima, kokios jis spalvos. Galima būtų laikyti, kad yra dvi bandymo baigtys: B = „Išimtas baltas rutulys“ ir J = „Išimtas juodas rutulys“. Tačiau akivaizdu, kad šios baigtys nevienodai tikėtinos, nes baltų rutulių yra daugiau, taigi daugiau ir galimybių išimti baltą rutulį. Kad šiam bandymui sudarytume vienodai tikėtinų elementariųjų įvykių aibę, visus rutulius sunumeruokime: baltus – numeriais nuo 1 iki 7, o juodus – numeriais 8, 9, 10. Įvykiai „Išimtas k-tasis rutulys“ jau vienodai tikėtini. Be to, šie 10 įvykių sudaro bandymo baigčių aibę, todėl $n = 10$. Mus dominančiam įvykiui B palankūs yra pirmieji 7 elementarieji įvykiai, t.y. $m = 7$. Vadinasi,

$$\mathbf{P}(B) = \frac{7}{10} . \quad ■$$

2.4 uždavinys. Iš septynių loterijos bilietų vienas laimi. Septyni žmonės paeiliui nesirinkdami ima po vieną bilietą ir jų negrąžina. Ar tikimybė ištraukti laimingą bilietą priklauso nuo žmogaus eilės numerio?

Sprendimas. Sunumeruokime visus bilietus nuo 1 iki 7. Laimingąjį bilietą pažymėkime, pavyzdžiui, skaičiumi 1. Paeiliui traukdami bilietus, sudarome kėlinį iš 7 bilietų. Tas kėlinys ir bus elementarusis įvykis. Todėl skirtingų bandymo baigčių yra $n = 7!$. Kadangi bilietai traukiami nesirenkant, tai visos baigtys yra vienodai tikėtinos. Mums reikia apskaičiuoti įvykio A = „k-tasis žmogus ištraukė laimingą bilietą“ tikimybę; čia $k = 1,2,...,7$. Šiam įvykiui palankios baigtys, kai gaunami kėliniai, kurių k-tojoje vietoje yra laimingasis (skaičiumi 1 pažymėtas) bilietas, o kitas šešias vietas užima bet kaip išdėstyti šeši likę bilietai. Tokių šešių bilietų kėlinių yra 6!, t.y. $m = 6!$. Todėl

$$\mathbf{P}(A) = \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}.$$

Matome, kad tikimybė ištraukti laimingą bilietą nepriklauso nuo traukiančiojo eilės numerio. ■

Esama daug uždavinių, kuriuose elementariųjų įvykių tikimybės yra nelygios. Pateiksime pavyzdžių.

1. Metama moneta gali būti nesimetriška ar nevienalytė. Tada herbo ir skaičiaus atsivertimo tikimybės yra nelygios.

2. Krepšininkas, mesdamas baudą, gali pataikyti arba nepataikyti. Šių įvykių tikimybės taip pat yra nevienodos.

3. Tikrinama fabrike pagaminta detalė. Ji gali būti kokybiška arba nekokybiška. Šių elementariųjų įvykių tikimybės paprastai yra nelygios.

Sakykime, kad elementariųjų įvykių aibę E sudaro įvykiai $E_1, E_2, ..., E_n$, o jų tikimybės $\mathbf{P}(E_1), \mathbf{P}(E_2), ..., \mathbf{P}(E_n)$ yra tokios, kad:

1. $0 \leq \mathbf{P}(E_i) \leq 1$ su visais i.
2. $\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + ... + \mathbf{P}(E_n) = 1$.

2.3 apibrėžimas

Įvykio A tikimybė $\mathbf{P}(A)$ lygi įvykiui A palankių elementariųjų įvykių tikimybių sumai.

Pavyzdys. Sakykime, kad lošimo kauliuko sienos nudažytos trimis spalvomis: trys sienos – žaliai, dvi – baltai ir viena – raudonai. Metant šį kauliuką galimos trys baigtys:

$E_1 = \check{Z}$ = „Atsivertė žalia siena",
$E_2 = B$ = „Atsivertė balta siena",
$E_3 = R$ = „Atsivertė raudona siena".

Natūralu laikyti, kad

$$\mathbf{P}(E_1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(E_2) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbf{P}(E_3) = \frac{1}{6}.$$

Tada, remiantis 2.3 apibrėžimu, įvykio

A = „Atsivertė žalia arba raudona siena"

tikimybė lygi

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_3) = \mathbf{P}(\check{Z}) + \mathbf{P}(R) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}. \qquad \blacksquare$$

2.3 apibrėžimas sutampa su klasikiniu 2.1 tikimybės apibrėžimu, kai elementariųjų įvykių tikimybės lygios:

$$\mathbf{P}(E_1) = \mathbf{P}(E_2) = ... = \mathbf{P}(E_n) = \frac{1}{n}.$$

Norint apskaičiuoti įvykio tikimybę remiantis 2.3 apibrėžimu, pravartu uždavinį išskaidyti taip:

1. Nusakyti bandymą, kurio metu įvyksta dominantis įvykis A.

2. Rasti šio bandymo elementariųjų įvykių aibę E. Dažnai patogu surašyti visus elementariuosius įvykius. Pravartu įsitikinti, kad surašyti įvykiai yra tikrai neskaidomi.

3. Įsitikinti, kad visų n elementariųjų įvykių tikimybės tenkina nelygybes:

$0 \leq \mathbf{P}(E_i) \leq 1, \quad i = 1, 2, ..., n$

ir kad

$\mathbf{P}(E_1) + \mathbf{P}(E_2) + ... + \mathbf{P}(E_n) = 1.$

4. Rasti dominančiam įvykiui A palankius elementariuosius įvykius E_i, t.y. elementariuosius įvykius, sudarančius įvykį A.

5. Apskaičiuoti įvykio A tikimybę, sudedant jam palankių elementariųjų įvykių tikimybes.

UŽDAVINIAI

1. Metame lošimo kauliuką. Kokia tikimybė, kad iškris trys akutės? Daugiau kaip trys akutės? Mažiau kaip trys akutės?
2. Klasėje yra 15 mergaičių ir 10 berniukų. Atsitiktinai pasirenkamas vienas mokinys. Kokia tikimybė, kad bus pasirinktas berniukas?
3. Dėžėje yra 10 baltų ir 12 juodų vienodo didumo rutulių. Nesirenkant iš dėžės išimamas vienas rutulys. Kokia tikimybė išimti:
   a) baltą rutulį;
   b) juodą rutulį?
4. Taisyklinga moneta metama 4 kartus. Surašykite visus galimus šio bandymo elementariuosius įvykius. Priskirkite jiems tikimybes.
5. Dėžėje yra trys rutuliai, kurie skiriasi tik spalva: baltas, raudonas ir juodas. Atsitiktinai iš dėžės vienas po kito traukiami du rutuliai. Ištraukus pirmąjį, jis negrąžinamas. Sudarykite šio bandymo elementariųjų įvykių aibę. Priskirkite elementariesiems įvykiams tikimybes.
6. Tas pats, kaip ir 5 uždavinys, tik prieš traukiant antrą rutulį, pirmasis vėl grąžinamas į dėžę.
7. Dėžėje yra 3 rutuliai, kurie skiriasi tik spalva: 2 juodi ir 1 baltas. Nesirenkant vienas po kito traukiami du rutuliai. Pirmasis negrąžinamas. Sudarykite: a) šešiaelementę elementariųjų įvykių aibę; b) trielementę elementariųjų įvykių aibę.
8. Dėžėje yra 2 juodi ir 1 baltas rutulys. Jie skiriasi tik spalva. Vienas po kito traukiami du rutuliai. Prieš traukiant antrą, pirmasis grąžinamas į dėžę. Sudarykite elementariųjų įvykių aibę. Priskirkite elementariesiems įvykiams tikimybes. Raskite tikimybę, kad pirmas ištrauktas rutulys bus baltas.
9. Skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 parašomi po vieną kortelėse. Kortelės sudedamos į dėžutę ir sumaišomos. Nesirenkant imama viena kortelė. Kokia tikimybė, kad joje parašytas skaičius yra: a) lyginis; b) nelyginis; c) pirminis; d) dalijasi iš 3?
10. Metami du lošimo kauliukai. Apskaičiuokite tikimybę, kad:
    a) iškritusių akučių suma lygi dviem, trim, keturiems, ..., dvylikai;
    b) iškritusių akučių suma didesnė už 6;
    c) iškritusių akučių suma didesnė už 3, bet mažesnė už 8.
11. Sakykime, kad taisyklingo lošimo kauliuko sieną, pažymėtą 6 akutėmis, perdažėme ir pažymėjome 3 akutes. Raskite tikimybę, kad:
    a) atsivers trys akutės;
    b) atsivers ne mažiau kaip keturios akutės;
    c) atsivers ne mažiau kaip 3 ir ne daugiau kaip 4 akutės.
12. Penkios vienodos kortelės, kuriose parašytos raidės *A, D, E, L, S*, atsitiktinai dedamos į eilę. Kokia tikimybė sudėti žodį LEDAS?
13. Devynios kortelės pažymėtos skaitmenimis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Nesirenkant imamos keturios kortelės ir dedamos viena greta kitos. Gaunamas keturženklis skaičius. Kokia tikimybė, kad jis bus lyginis?

14. Krepšyje sudėta 10 kamuolių. Jie sunumeruoti nuo 1 iki 10. Nesirenkant išimami du kamuoliai. Kokia tikimybė, kad tai bus 2-asis ir 5-asis kamuolys?

15. Parduotuvėje yra 10 vienos rūšies garso kolonėlių, iš kurių viena prastos kokybės. Kokia tikimybė, kad, pirkdami 2 kolonėles, įsigysime prastos kokybės kolonėlę? Kokia tikimybė, kad abi nupirktos kolonėlės bus geros kokybės?

16. Meskite dvi monetas 50 kartų ir žymėkite metimų rezultatus. Apskaičiuokite dažnius tokių baigčių: abiejų monetų atsivertė herbas, vienos monetos atsivertė herbas, kitos – skaičius, abiejų monetų atsivertė skaičius. Ar galima, jūsų nuomone, sakyti, kad nurodytos bandymo baigtys yra vienodai galimos?

17. Dėžėje yra 12 baltų ir 8 juodi vienodo didumo rutuliai.
a) Nesirenkant išimtas vienas rutulys. Kokia tikimybė, kad jis baltas?
b) Nesirenkant išimtas vienas rutulys. Kokia tikimybė, kad jis juodas?
c)* Nesirenkant išimti du rutuliai. Kokia tikimybė, kad jie skirtingų spalvų?
d)* Nežiūrint išimti aštuoni rutuliai. Kokia tikimybė, kad trys iš jų juodi?
e)* Nežiūrint išimti aštuoni rutuliai. Kokia tikimybė, kad juodų rutulių išimta ne daugiau kaip trys?

18. Poliklinikoje yra du dantų gydytojai. Du ligoniai atsitiktinai (neteikdami nė vienam iš gydytojų pirmenybės) pasirenka gydytoją.
a) Sudarykite elementariųjų įvykių aibę.
b) Raskite įvykiui
A = „Ligoniai pasirinko skirtingus gydytojus"
palankius elementariuosius įvykius.
c) Elementariesiems įvykiams priskirkite pagrįstas tikimybes ir apskaičiuokite įvykio A tikimybę.

19. Degustatorius turi eilės tvarka išrikiuoti trijų rūšių – A, B ir C – arbatą atsižvelgdamas į skonį.
a) Apibrėžkite bandymą.
b) Sudarykite elementariųjų įvykių aibę.
c) Sakykime, kad degustatorius dar neįgudęs skirti arbatos rūšių ir išrikiuoja jas atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad arbatą A jis pripažins gardžiausia? Prasčiausia?

20. Bandymas turi dvi galimas baigtis, kurių tikimybės sutinka kaip 2 : 1. Raskite tas tikimybes.

21. Elementariųjų įvykių aibę sudaro trys elementarieji įvykiai, kurių tikimybės (galimybės) vertinamos santykiu 3 : 2 : 1. Raskite šių elementariųjų įvykių tikimybes.

22. Elementariųjų įvykių aibę sudaro trys elementarieji įvykiai: E_1, E_2, E_3. Įvykių E_1 ir E_2 tikimybės lygios, o įvykio E_3 tikimybė dvigubai didesnė nei įvykio E_1 . Raskite įvykių E_1 , E_2 ir E_3 tikimybes.

23. Taikinys turi 5 nesusikertančius sektorius: S_1, S_2, S_3, S_4 ir S_5. Šaulys, į juos pataikęs, gauna atitinkamai 1, 2, 3, 4 ir 5 taškus. Tikimybės pataikyti į sektorius yra

$$\mathbf{P}(S_1) = 0{,}25, \quad \mathbf{P}(S_2) = 0{,}2, \quad \mathbf{P}(S_3) = 0{,}2, \quad \mathbf{P}(S_4) = 0{,}15, \quad \mathbf{P}(S_5) = 0{,}1.$$

Tikimybė, kad šaulys iš viso nepataikys į taikinį, lygi 0,1. Raskite tikimybes šių įvykių:

A_k = „Šaulys gaus ne mažiau kaip k taškų", k = 1, 2, 3, 4, 5;
B = „Šaulys gaus lyginį skaičių taškų";
C = „Šaulys gaus nelyginį skaičių taškų";
D = „Šaulys gaus tris arba keturis taškus".

24. Tikimybės, kad teksto rinkėjas viename puslapyje padarys 0, 1, 2, 3, 4, daugiau kaip 4 klaidas yra atitinkamai 0,05, 0,2, 0,3, 0,2, 0,15, 0,1. Raskite tikimybes, kad rinkėjas padarys:

a) bent 1 klaidą;
b) bent 3 klaidas;
c) ne daugiau kaip 1 klaidą;
d) ne daugiau kaip 3 klaidas;
e) ne mažiau kaip 2 ir ne daugiau kaip 4 klaidas.

2.3. AIBĖS IR ĮVYKIAI

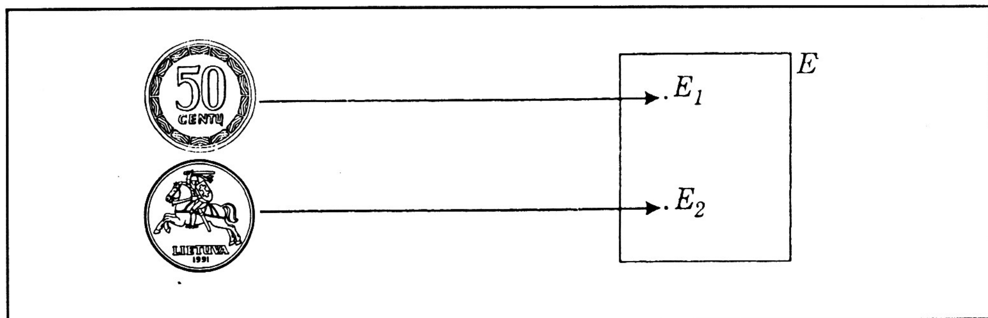
Trumpai apibūdinsime aibės sąvoką. Galima nagrinėti visų realiųjų skaičių aibę, natūraliųjų skaičių aibę, visų kurios nors mokyklos mokinių aibę, kurio nors miesto gyventojų aibę ir t.t. Elementų visuma sudaro aibę. Aibė duota, kai nurodyti visi jos elementai. Aibės elementus galima nurodyti remiantis kuriuo nors bendru požymiu arba paprasčiausiai sudaryti jų sąrašą. Pastarasis būdas ypač tinka, kai aibės elementų skaičius yra baigtinis.

Aibės sąvokos apibrėžimo matematikoje nėra. Tai viena iš pradinių, pagrindinių matematikos sąvokų (kaip ir taškas, tiesė, plokštuma), padedanti apibrėžti kitas matematikos sąvokas ar tyrimo objektus.

Sakykime, kad atliekame kokį nors bandymą. Jo elementariųjų įvykių aibę pažymėkime raide E. Elementariųjų įvykių kilmė tikimybių teorijoje visiškai nesvarbi. Elementariųjų įvykių aibė – tai bandymo baigčių aibė: bet kuri bandymo baigtis atitinka vieną ir tik vieną elementariųjų įvykių aibės elementą. Apie kurį nors įvykį A galime kalbėti tik tada, kai kiekvienai bandymo baigčiai (elementariajam įvykiui) žinoma, ar įvykis A įvyko, ar neįvyko. Kiekvienas su atliekamu bandymu susijęs įvykis gali būti sutapatintas su tam tikra aibės E dalimi, t.y. su jam palankių elementariųjų įvykių visuma. Kitaip tariant, kiekvienas įvykis yra elementariųjų įvykių aibės E poaibis (dalis). Toliau šių abiejų sąvokų neskirsime. Ir įvykius, ir aibės E poaibius žymėsime raidėmis A, B, C ir pan. Tai, kad kuris nors įvykis A yra elementariųjų įvykių aibės poaibis, užrašoma taip:

$$A \subset E.$$

Aibių kalba toks užrašas reiškia, kad kiekvienas aibės A elementas (elementarusis įvykis) yra ir aibės E elementas (2.2 pav.).



2.2 pav.

Jau per pirmąsias matematikos pamokas išmokstame atlikti aritmetinius veiksmus su sveikaisiais, o vėliau ir su realiaisiais skaičiais. Tuos veiksmus atliekame pagal tam tikras taisykles. Panašiai atliekami ir veiksmai su aibėmis. Pirmiausia susitarsime, kokias aibes laikysime lygiomis.

2.4 apibrėžimas

Dvi aibės yra lygios, jei visi pirmosios aibės elementai priklauso antrajai aibei ir, atvirkščiai, visi antrosios aibės elementai priklauso pirmajai aibei.

Pavyzdys. Skaičių aibės $A = \{ 1, 2, 3 \}$ ir $B = \{ 3, 2, 1 \}$ yra lygios, t.y. $A = B$. Raidžių aibės $C = \{ n, a, m, o \}$ ir $D = \{ m, a, n, o \}$ yra lygios, t.y. $C = D$. ■

AIBIŲ SĄJUNGA IR SANKIRTA

2.5 apibrėžimas

Dviejų aibių A ir B **sąjunga** vadiname aibę $A \cup B$, kurios kiekvienas elementas priklauso bent vienai iš aibių A arba B.

Tekste sąjungos ženklas $\cup$ skaitomas „arba“. Tai atitinka aibių sąjungos apibrėžimą: kiekvienas aibės $A \cup B$ elementas priklauso arba aibei A, arba aibei B. Žodelis „arba“ reiškia, kad aibės $A \cup B$ elementas gali tuo pačiu metu priklausyti ir aibei A, ir aibei B. Kalbant apie įvykius, pasakymas „įvyko įvykis $A \cup B$“ reiškia tą patį, ką ir pasakymas „įvyko įvykis A arba įvykis B“.

2.7 pavyzdys. Metame lošimo kauliuką. Elementariųjų įvykių aibę užrašome taip:

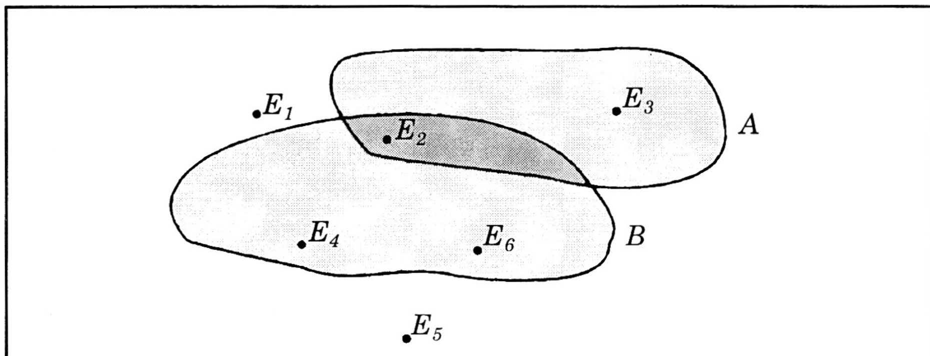
$$E = \{ E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 \} .$$

Aišku, kad E_1 = „Iškrito viena akutė“, E_2 = „Iškrito dvi akutės“ ir t.t. Įvykį A = „Iškrito dvi arba trys akutės“ galima užrašyti taip:

$$A = \{ E_2, E_3 \} = E_2 \cup E_3 .$$

Įvykį B = „Iškrito lyginis akučių skaičius arba dvi akutės" galima užrašyti

$$B = \{ E_2, E_4, E_6 \} \cup E_2 = \{ E_2, E_4, E_6 \} = E_2 \cup E_4 \cup E_6.$$



2.3 pav.

2.3 paveiksle pavaizduotos aibės A ir B.

Pastarojoje lygybėje užrašėme dar neapibrėžtą trijų aibių sąjungą. Trijų ir daugiau aibių sąjunga apibrėžiama taip pat kaip ir dviejų aibių sąjunga. ■

2.6 apibrėžimas

Aibių $A, B, C, \ldots$ sąjunga vadinama tokia aibė, kurios kiekvienas elementas priklauso bent vienai iš aibių $A, B, C, \ldots$. Sąjunga žymima taip: $A \cup B \cup C \ldots$.

Iš aibių sąjungos apibrėžimo išplaukia lygybės:

$$A \cup B = B \cup A \,,$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \,.$$

2.6 apibrėžimą įvykiams galėtume formuluoti taip.

2.6′ apibrėžimas

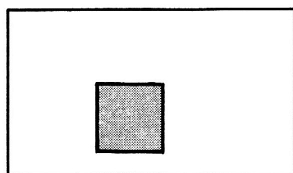
Įvykių $A, B, C, \ldots$ sąjunga vadinamas toks įvykis, kuris įvyksta, kai įvyksta bent vienas iš įvykių $A, B, C, \ldots$.

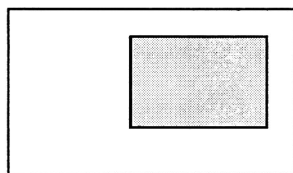
Pavyzdys. Metame lošimo kauliuką. Įvykį A = „Iškrito daugiau kaip trys akutės" galime užrašyti taip:

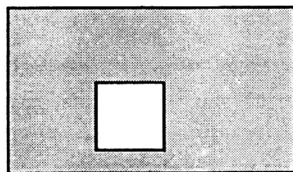
$$A = E_4 \cup E_5 \cup E_6 \,.$$

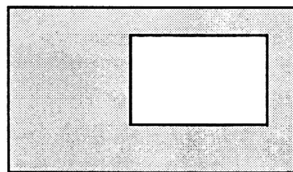
Čia pavartojome 2.7 pavyzdžio žymėjimus. ■

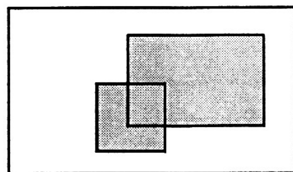
Aibės dažnai vaizduojamos piešiniais. Tai padeda geriau suvokti, o kartais ir rasti aibių veiksmo rezultatą.

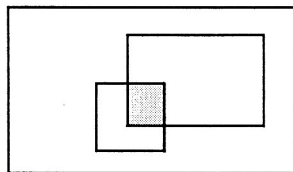












2.4 pav. Aibių veiksmai

Dabar apibrėšime aibių veiksmą, kurio rezultatas yra aibių sankirta. Jis žymimas ženklu $\cap$.

Kurio nors elemento priklausymą dviem aibėms kalbant apie įvykius atitinka jungtukas „ir". Įvykis „A ir B" susideda iš tų elementariųjų įvykių, kurie priklauso ir aibei A, ir aibei B.

2.7 apibrėžimas

Dviejų aibių A ir B **sankirta** (sandauga) $A \cap B$ yra aibė, susidedanti iš tų elementų, kurie priklauso ir aibei A, ir aibei B.

2.8 pavyzdys. Dar kartą pasitelkime 2.7 pavyzdį, kuriame

$$A = \{ E_2, E_3 \}, \qquad B = \{ E_2, E_4, E_6 \} .$$

Todėl šiuo atveju

$$A \cap B = \{ E_2, E_3 \} \cap \{ E_2, E_4, E_6 \} = E_2.$$

Žodžiais galime pasakyti, kad įvykis „A ir B" įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta įvykis E_2 = „Iškrito dvi akutės". Gali atsitikti, kad nebus elemento, priklausančio abiem aibėms. Pavyzdžiui, $A \cap E_1 = \{ E_2, E_3 \} \cap E_1$. Tada sakysime, kad aibių sankirta yra tuščioji aibė. Ją žymėsime $\varnothing$, t.y. užrašysime

$$A \cap E_1 = \varnothing .$$

Akivaizdu, kad visada $\mathbf{P}(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0$. (Palankių elementariųjų įvykių skaičius yra lygus nuliui.) ■

Aibių sankirta subrūkšniuota 2.4 paveikslo paskutinėje diagramoje. Panašiai apibrėžiama trijų ir didesnio skaičiaus aibių sankirta. Įvykių sankirta apibrėžiama taip.

2.7′ apibrėžimas

Įvykių A ir B sankirta (sandauga) vadinamas įvykis $A \cap B$, kuris įvyksta tada, kai įvyksta ir įvykis A, ir įvykis B.

Pavyzdys. Į elektrinę grandinę nuosekliai įjungti du jungikliai. Kiekvienas jų gali būti įjungtas ar išjungtas. Nagrinėkime įvykius: A = „Įjungtas 1-as jungiklis“, B = „Įjungtas 2-as jungiklis“ ir C = „Grandine teka srovė“. Tada, sujungus tą elektrinę grandinę, $C = A \cap B$. ■

Galima nagrinėti trijų, keturių ir apskritai bet kurio skaičiaus įvykių sankirtą.

2.8 apibrėžimas

Aibių $A, B, C, \ldots$ sankirta vadinama tokia aibė, kurios elementai priklauso visoms aibėms $A, B, C, \ldots$. Sankirta žymima taip:

$$A \cap B \cap C \ldots .$$

Iš aibių sankirtos 2.7 ir 2.8 apibrėžimų išplaukia šios formulės:

$$A \cap B = B \cap A ,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C .$$

2.8 pavyzdyje, atliekant veiksmus su aibėmis, teko pavartoti tuščiosios aibės sąvoką. Lygiai taip yra naudinga įvykio, kuris negali įvykti, sąvoka. Sakykime, metame monetą. Mūsų bandymo sąlygomis įvykiai „Atsivertė ir herbas, ir skaičius“, „Moneta nuskriejo į kosminę erdvę“, „Moneta nukrito ant briaunos“ įvykti negali.

2.9 apibrėžimas

Įvykis, kuris atliekant bandymą negali įvykti, vadinamas **negalimuoju**.

Negalimajam įvykiui nėra nė vieno palankaus elementariojo įvykio. Negalimąjį įvykį, kaip ir tuščiąją aibę, žymėsime $\varnothing$. Pabrėžiame, kad su bet kuria aibe A yra teisingos lygybės

$$A \cup \varnothing = A, \qquad A \cap \varnothing = \varnothing .$$

2.10 apibrėžimas

Įvykis, kuris atliekant bandymą būtinai įvyksta, vadinamas **būtinuoju**.

Būtinajam įvykiui yra palankūs visi nagrinėjamo bandymo elementarieji įvykiai. Būtinąjį įvykį žymėsime raide E.

Pavyzdžiai. Metame monetą. Įvykis A = „Atsivertė herbas arba skaičius" yra būtinasis. Metame lošimo kauliuką. Įvykis A = „Iškrito bent viena akutė" yra būtinasis.

Iš 2.10 apibrėžimo tiesiogiai išplaukia lygybės:

$$A \cup E = E, \qquad A \cap E = A .$$

Be to, akivaizdu, kad $\mathbf{P}(E) = \frac{n}{n} = 1$. ■

UŽDAVINIAI

25. Pavaizduokite šiuos sąryšius diagramomis, panašiomis į pateiktas 2.4 paveiksle:

a) $\overline{\overline{A}} = A$; b) $A \cap \overline{A} = \varnothing$; c) $A \cup \overline{A} = E$;

d) $A \cap B \subset A$; e) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; f) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

g) $A \subset A \cup B$.

26. Elementariųjų įvykių aibę sudaro aštuoni elementarieji įvykiai E_1, E_2, ..., E_8, o $\mathbf{P}(E_i) = \frac{1}{8}$, i = 1, 2, ..., 8. Įvykiai A ir B apibrėžiami taip:

$$A = \{ E_1, E_4, E_6 \},$$

$$B = \{ E_3, E_4, E_5, E_6, E_7 \} .$$

Apskaičiuokite tikimybes: a) $\mathbf{P}(A)$; b) $\mathbf{P}(\overline{A})$; c) $\mathbf{P}(B)$; d) $\mathbf{P}(\overline{B})$; e) $\mathbf{P}(A \cup B)$; f) $\mathbf{P}(A \cap B)$.

27. Į taikinį šaunama tris kartus. Nagrinėkime įvykius A_k = „Pataikyta k-tuoju šūviu", k = 1, 2, 3. Taikydami įvykių A_k ir $\overline{A}_k$ veiksmus, užrašykite:
A = „Pataikyta visus tris kartus";
B = „Tris kartus nepataikyta";
C = „Pataikyta bent vieną kartą";
D = „Nepataikyta bent vieną kartą";
F = „Pataikyta ne mažiau kaip du kartus";
G = „Pataikyta ne daugiau kaip vieną kartą";
H = „Pataikyta ne anksčiau kaip trečiuoju šūviu".

28. Pro mikroskopą stebimos keturios ląstelės. Per stebėjimo laiką kiekviena jų gali skilti arba neskilti. Nagrinėjami įvykiai:
A = „Skilo viena ląstelė";
B = „Skilo bent viena ląstelė";
C = „Skilo ne mažiau kaip dvi ląstelės";
D = „Skilo visos keturios ląstelės".
Ką reiškia įvykiai: a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $B \cup C$; d) $B \cap C$; e) $B \cap D$? Ar teisinga lygybė $B \cap D = C \cap D$?

29. Bandymo elementariųjų įvykių aibę sudaro n elementariųjų įvykių. Kiek skirtingų įvykių (įskaitant būtinąjį ir negalimąjį įvykius) susiję su šiuo bandymu?

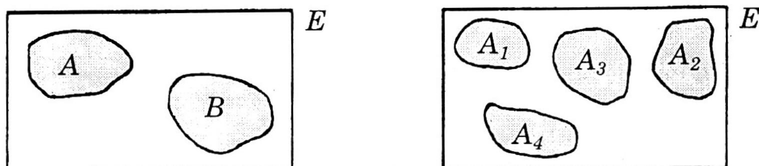
2.4. ĮVYKIŲ NESUTAIKOMUMAS

Jau minėjome, kad yra įvykių, kurie negali įvykti vienu metu. Pavyzdžiui, metant monetą, negali vienu metu atsiversti ir herbas, ir skaičius.

2.11 apibrėžimas

Du įvykiai vadinami **nesutaikomais**, jei nėra abiem įvykiams palankaus elementariojo įvykio. k įvykių vadinami nesutaikomais, jei kiekvieni du iš šių įvykių yra nesutaikomi.

Kadangi nėra elementariojo įvykio, priklausančio nesutaikomiems įvykiams A ir B, tai tų įvykių sankirta yra tuščioji aibė: $A \cap B = \varnothing$. Jei k įvykių yra nesutaikomi, tai bet kurių dviejų šių įvykių sankirta yra tuščioji aibė (2.5 pav.).



2.5 pav. Nesutaikomi įvykiai

2.9 pavyzdys. Metame lošimo kauliuką. Nagrinėkime įvykius A = „Iškrito viena akutė" ir B = „Iškrito lyginis skaičius akučių". Akivaizdu, kad nėra elementariojo įvykio, palankaus ir įvykiui A, ir įvykiui B, vadinasi, įvykiai A ir B yra nesutaikomi. Apskaičiuosime įvykio $A \cup B$ = „Iškrito viena akutė arba lyginis akučių skaičius" tikimybę. Įvykiui A palankus vienas elementarusis įvykis, o įvykiui B – trys. Abiem palankių elementariųjų įvykių nėra. Todėl

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{1+3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{2}{3}. \quad \blacksquare$$

Ar visada teisinga lygybė

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)\ ?$$

Į šį klausimą atsako 2.1 teorema.

2.1 teorema

Jei įvykiai A ir B yra nesutaikomi, tai jų sąjungos tikimybė lygi įvykių A ir B tikimybių sumai:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B). \qquad (2.3)$$

Įrodymas. Sakykime, kad iš n elementariųjų įvykių m_A elementariųjų įvykių yra palankūs įvykiui A ir m_B – palankūs įvykiui B. Įvykiui $A \cup B$ palankūs abiejų aibių elementarieji įvykiai. Jų bus $m_A + m_B$, nes nėra nė vieno abiem aibėms A ir B palankaus elementariojo įvykio. Todėl

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B). \quad \blacksquare$$

2.1 teoremą galima taikyti bet kuriam nesutaikomų įvykių skaičiui (2.5 pav.).

2.2 teorema

Jei $A_1, A_2, ..., A_k$ – nesutaikomi įvykiai, tai

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + ... + \mathbf{P}(A_k). \quad (2.4)$$

Ši teorema įrodoma panašiai kaip 2.1 teorema. Siūlome tai padaryti savarankiškai. ■

Deja, (2.3) lygybė nėra teisinga su bet kuriais įvykiais A ir B. Tada įvykių sąjungos tikimybės formulė yra sudėtingesnė.

2.3 teorema

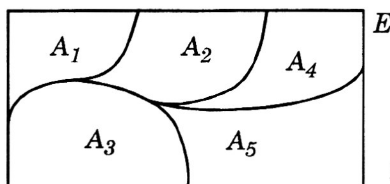
Su bet kuriais įvykiais A ir B teisinga lygybė:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B). \quad (2.5)$$

Įrodymas. Įvykio $A \cup B$ tikimybė lygi sumai tikimybių tų elementariųjų įvykių, kurie priklauso įvykiui $A \cup B$. Suma $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ yra lygi sumai tikimybių elementariųjų įvykių, sudarančių aibę A, ir tikimybių elementariųjų įvykių, sudarančių aibę B. Aišku, kad sumoje $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ tikimybės tų elementariųjų įvykių, kurie priklauso ir aibei A, ir aibei B, sudėtos po du kartus. Kitaip sakant, elementariųjų įvykių, priklausančių įvykiui $A \cap B$ tikimybės (ir tik šios tikimybės) reiškinyje $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ susumuotos po du kartus. Todėl, jei iš reiškinio $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ atimsime $\mathbf{P}(A \cap B)$, gausime $A \cup B$ sudarančių elementariųjų įvykių tikimybių sumą. Taigi teisinga (2.5) lygybė. ■

2.12 apibrėžimas

Jei įvykiai $A_1, A_2, ..., A_k$ yra nesutaikomi ir jų sąjunga sutampa su visų elementariųjų įvykių aibe E, tai tie k įvykių sudaro aibės E skaidinį į k poaibių.



$$E = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$$

2.6 pav. Aibės E skaidinys į 5 poaibius

2.4 teorema

Jei aibės $A_1, A_2, ..., A_k$ sudaro elementariųjų įvykių aibės E skaidinį, tai

$$\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + ... + \mathbf{P}(A_k) = 1 .$$

Įrodymas. Remsimės 2.2 teorema:

$$\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + ... + \mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = \mathbf{P}(E) = 1. \quad \blacksquare$$

2.10 pavyzdys. Daugeliui žinomas žaidimas, kuriame reikia atspėti 5 laimingus skaičius iš 36. Šiuo atveju bandymas yra pasirinkimas penkių skaičių iš 36. Kadangi skaičių pasirinkimo tvarka nesvarbi, reikia apskaičiuoti derinius iš 36 po 5. Tiek bus skirtingų penkių skaičių rinkinių. Jie ir sudarys elementariųjų įvykių aibę. Laikysime, kad kiekvienas rinkinys turi tiek pat galimybių būti pasirinktas. Nagrinėsime tokius įvykius:

A_0 = „Neatspėtas nė vienas skaičius“,
A_1 = „Atspėtas vienas skaičius“,
A_2 = „Atspėti du skaičiai“,
– – – – – – – – – – – – – – – – – – – –
A_5 = „Atspėti penki skaičiai“.

Apskaičiuosime šių įvykių tikimybes. Įvykiui A_0 yra palankūs rinkiniai, sudaryti tik iš nelaimingų skaičių, kurių yra 36 – 5 = 31. Todėl įvykiui A_0 palankių elementariųjų įvykių yra C_{31}^5 . Gauname:

$$\mathbf{P}(A_0) = \frac{C_{31}^5}{C_{36}^5} = \frac{\dfrac{31!}{5!\cdot 26!}}{\dfrac{36!}{5!\cdot 31!}} = \frac{27\cdot 28\cdot 29\cdot 30\cdot 31}{32\cdot 33\cdot 34\cdot 35\cdot 36} \approx 0{,}45.$$

Įvykiui A_1 yra palankūs tie penkių skaičių rinkiniai, kurių vienas skaičius laimingas, o kiti – ne. Vieną laimingą skaičių galime pasirinkti C_5^1 būdais, keturis nelaimingus skaičius (iš 31) – C_{31}^4 = 31 456 būdais. Todėl, remiantis daugybos taisykle, įvykiui A_1 palankių elementariųjų įvykių bus $C_5^1 \cdot C_{31}^4$ = 157 325. Taigi

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{C_5^1\cdot C_{31}^4}{C_{36}^5} \approx 0{,}417.$$

Įvykiui A_2 yra palankūs tie penkių skaičių rinkiniai, kurių du skaičiai laimingi, o trys – nelaimingi. Du laimingus skaičius galima pasirinkti C_5^2 = 10 būdų, o tris nelaimingus — C_{31}^3 = 4495 būdais. Vadinasi, įvykiui A_2 palankių elementariųjų įvykių bus

$$C_5^2 \cdot C_{31}^3 = 44\ 950.$$

Todėl

$$\mathbf{P}(A_2) = \frac{C_5^2\cdot C_{31}^3}{C_{36}^5} \approx 0{,}1119.$$

Visiškai panašiai randame, kad

$$\mathbf{P}(A_3) = \frac{C_5^3\cdot C_{31}^2}{C_{36}^5} \approx 0{,}012,$$

$$\mathbf{P}(A_4) = \frac{C_5^4\cdot C_{31}^1}{C_{36}^5} \approx 0{,}0004,$$

$$\mathbf{P}(A_5) = \frac{1}{C_{36}^5} \approx 0{,}00002652576.$$

Įvykiai $A_0, A_1, ..., A_5$ yra nesutaikomi ir sudaro elementariųjų įvykių aibės E skaidinį. Todėl, remdamiesi 2.4 teorema, galime tvirtinti, kad

$$\mathbf{P}(A_0) + \mathbf{P}(A_1) + ... + \mathbf{P}(A_5) = 1.$$

Savarankiškai patikrinkite šią lygybę. (Atsižvelkite į apvalinimą.) Priminsime, kad žaidime 5 iš 36 laimima tada, kai atspėjami bent 3 skaičiai, t.y. trys arba keturi, arba penki skaičiai. Todėl laimėjimo tikimybė

$$\mathbf{P}(A_3 \cup A_4 \cup A_5) = \mathbf{P}(A_3) + \mathbf{P}(A_4) + \mathbf{P}(A_5) .$$

Rašydami šią lygybę, vėl remiamės tuo, kad įvykiai A_3, A_4, A_5 yra nesutaikomi. Įrašę tikimybių $\mathbf{P}(A_3)$, $\mathbf{P}(A_4)$, $\mathbf{P}(A_5)$ apytiksles reikšmes, apskaičiuojame tikimybę laimėti loterijoje 5 iš 36:

$$\mathbf{P}(A_3 \cup A_4 \cup A_5) \approx 0{,}0127. \quad \blacksquare$$

UŽDAVINIAI

30. Metame lošimo kauliuką. Apibrėžkime įvykius
A = „Iškrito viena akutė",
B = „Iškrito lyginis akučių skaičius".
Ar įvykiai A ir B nesutaikomi? Apskaičiuokite įvykio C = „Iškrito viena arba dvi, arba trys akutės" tikimybę.

31. a) Raskite $\mathbf{P}(A \cup B)$, kai $\mathbf{P}(A) = 0{,}4$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}5$, $\mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}25$.
b) Raskite $\mathbf{P}(A \cap B)$, kai $\mathbf{P}(A) = 0{,}15$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}65$, $\mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}72$.

32. Ar įvykiai A ir B gali būti tokie, kad:
a) $\mathbf{P}(A) = 0{,}6$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}7$ ir $\mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}2$?
b) $\mathbf{P}(A) = 0{,}6$ ir $\mathbf{P}(A \cap B) = 0{,}8$?
c) $\mathbf{P}(A) = 0{,}7$ ir $\mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}6$?

33. Tarkime, kad atliekame 2.6 pavyzdyje (p. 31) aprašytą bandymą, t.y. metame raudoną ir baltą kauliuką. Apskaičiuokite tikimybes šių įvykių:
a) „Iškrito 3 ir 4 akutės";
b) „Nė vieno kauliuko neiškrito nei 3, nei 4 akutės";
c) „Abiejų kauliukų iškrito ne mažiau kaip 3 akutės";
d) „Abiejų kauliukų iškritusių akučių suma lyginė";
e) „Abiejų kauliukų iškritusių akučių suma nelyginė".

34. Kortelėse parašomi skaičiai 1, 2, 3, ..., 20. Jos sumaišomos ir dedamos į dėžutę. Nežiūrint traukiama viena kortelė. Kokia tikimybė, kad joje parašytas skaičius yra pirminis arba dalijasi iš 3?

35. Į donorų sąrašą įrašyta 20 žmonių. Iš jų 10 turi pirmosios grupės kraują. Atsitiktinai iš sąrašo išrinkti 3 donorai. Raskite tikimybę, kad pirmosios grupės kraują turės:
a) visi trys donorai;
b) du iš jų;
c) vienas iš jų;
d) nė vienas.

36. Įsivaizduokite, kad turime sąrašą Lietuvos šeimų, auginančių po tris vaikus. Atsitiktinai iš to sąrašo pasirenkame vieną šeimą. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:

a) „Visi trys vaikai šeimoje – berniukai";
b) „Šeimoje du berniukai ir viena mergaitė";
c) „Šeimoje dvi mergaitės ir berniukas";
d) „Šeimoje trys mergaitės".

(Laikykite, kad mergaitės ir berniuko gimimo tikimybės yra lygios.)

37. Į knygų lentyną statome keturtomę enciklopediją nežiūrėdami į tomų numerius. Apskaičiuokite tikimybes šių įvykių:
A = „Visi tomai sudėti iš eilės";
B = „Vienas tomas yra savo vietoje";
C = „Du tomai yra savo vietoje";
D = „Bent vienas tomas yra savo vietoje";
F = „Trys tomai yra savo vietoje";
G = „Visi tomai yra ne vietoje".

Kurie šių įvykių sudaro visos elementariųjų įvykių aibės E skaidinį?

38. Prekybos centras kasdien gauna atsitiktinį skaičių, kintantį nuo 0 iki 6, užsakymų su tikimybėmis: 0,05, 0,1, 0,15, 0,3, 0,2, 0,1, 0,05. Apskaičiuokite tikimybę, kad:
a) bus gauta daugiau negu 3 užsakymai;
b) bus gautas bent vienas užsakymas;
c) užsakymų skaičius bus didesnis negu 2 ir mažesnis negu 6.

39. Penkiose kortelėse užrašome skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5. Korteles apverčiame ir sumaišome . Traukiame vieną po kitos 3 korteles ir, dėdami jas viena šalia kitos, sudarome triženklį skaičių. Kokia tikimybė, kad tas skaičius bus: a) lyginis? b) nelyginis? c) dalus iš 5?

40*. Žinoma, kad iš dvylikos vienodai atrodančių lempučių dvi yra nedegančios ir dešimt degančių. Lemputes tikriname iš eilės, kol randame abi nedegančias. Kokia tikimybė, kad antra nedeganti lemputė bus rasta atliekant k-tąjį bandymą (k = 2, 3, ..., 12)?

2.5. ĮVYKIŲ NEPRIKLAUSOMUMAS

Tikimybių teorijoje labai svarbi įvykių nepriklausomumo sąvoka. Ją pailiustruosime vėl pasitelkdami 2.6 pavyzdį.

2.5 uždavinys. Apskaičiuokite įvykio „Raudonojo kauliuko iškritusių akučių skaičius ne didesnis už 3, o baltojo — ne mažesnis už 5" tikimybę.

Sprendimas. Reikia apskaičiuoti tikimybę įvykio, kuris įvyksta, kai yra tuo pačiu metu išpildytos dvi sąlygos: $r \leq 3$, $b \geq 5$. Tarkime, kad A – elemen-

tariųjų įvykių, tenkinančių sąlygą $r \leq 3$, aibė, o B – elementariųjų įvykių, tenkinančių sąlygą $b \geq 5$, aibė. Reikia apskaičiuoti įvykio $A \cap B$ tikimybę. Iš 2.1 lentelės (p. 31) matome, kad šiai sankirtai priklauso $3 \cdot 2 = 6$ elementarieji įvykiai iš trijų pirmųjų eilučių ir dviejų paskutiniųjų stulpelių. Todėl

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Panašiai randame tikimybes

$$\mathbf{P}(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ ir } \mathbf{P}(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Taigi

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B). \quad \blacksquare \qquad (2.6)$$

Pabandysime 2.6 lygybę paaiškinti intuityviai. Tarkime, kad du kauliukus metėme daug kartų. Natūralu tikėtis, kad įvykis $r \leq 3$ įvyks maždaug pusėje bandymų. Toliau nagrinėkime tik tuos bandymus, kurių $r \leq 3$. Kuriai jų daliai bus išpildyta sąlyga $b \geq 5$? Natūralu teigti, kad raudonojo kauliuko metimo rezultatas neturi jokios įtakos baltojo kauliuko metimo rezultatui. Todėl maždaug $\frac{1}{3}$ tų metimų, kurių $r \leq 3$, tenkins sąlygą $b \geq 5$. Taigi bandymų, tenkinančių abi sąlygas, bus apytiksliai pusė bandymų trečdalio, t.y. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Ar visada (2.6) lygybė teisinga? Matysime, kad taip yra ne visada.

Nuojauta mums sako, kad raudonojo kauliuko metimo rezultatas nepriklauso nuo to, kiek akučių iškrito metant baltąjį kauliuką. Būtent šia prasme kasdienėje kalboje vartojama sąvoka „nepriklausomi įvykiai“. Akivaizdžių įvykių nepriklausomumo pavyzdžių galima rasti be galo daug. Tai, kad metant vieną monetą atsiverčia herbas, nekeičia herbo ar skaičiaus atsivertimo tikimybės metant kitą monetą. Panašiai berniuko gimimas vienai motinai nekeičia tikimybės pagimdyti berniuką ar mergaitę kitai. Antra vertus, pasakymas, kad du įvykiai „vienas su kitu visai nesusiję“, paprastai reiškia, kad šių įvykių sankirtos tikimybę randame sudauginę atskirų įvykių tikimybes. Taip jau darėme 2.5 uždavinyje. Tačiau matematikoje kiekvieną sąvoką reikia tiksliai apibrėžti.

2.13 apibrėžimas

Įvykiai A ir B vadinami nepriklausomais, jei

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B). \qquad (2.6)$$

Taigi matematinis nepriklausomų įvykių apibrėžimas sutampa su įprastu gyvenimišku nepriklausomumo įvaizdžiu. Anksčiau kalbėjome apie nesutaikomus įvykius. Kad geriau išmoktume skirti įvykių nepriklausomumą ir nesutaikomumą, įrodysime tokį teiginį.

2.5 teorema

Jei įvykiai A ir B yra nepriklausomi ir jų tikimybės yra teigiamos, tai jie nėra nesutaikomi.

Įrodymas. Remiamės (2.6) lygybe. Iš teoremos sąlygų išplaukia, kad

$$\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) > 0 . \qquad (2.7)$$

Jei įvykiai A ir B būtų nesutaikomi, tai $A \cap B = \varnothing$ ir tada

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0 ,$$

o tai jau prieštarauja (2.7) nelygybei. Gavome prieštarą. Tai ir reiškia, kad nepriklausomi įvykiai A ir B negali būti nesutaikomi. ■

Elementariųjų įvykių aibės sudarymas – labai svarbus, tačiau ne visada lengvas uždavinys. Tai priklauso ir nuo uždavinio sąlygos formuluotės. Net žymusis prancūzų matematikas enciklopedistas d'Alamberas (*J. d'Alambert,* 1717–1783) klydo spręsdamas tokį uždavinį.

2.6 uždavinys. Moneta metama du kartus. Kokia tikimybė, kad bent vieną kartą atsivers herbas?

Sprendimas ir komentaras. D'Alamberas manė, kad yra trys vienodai galimos šio bandymo baigtys: *HH, HS, SS*. (*HS* = „Vieną kartą iškrito herbas, kitą – skaičius".) Todėl jo atsakymas buvo $\frac{2}{3}$. Tačiau iš tikrųjų šio uždavinio bandymas yra ekvivalentus bandymui, kai metamos dvi skirtingo metalo monetos, pavyzdžiui, varinė ir sidabrinė. Dabar jau nesunkiai suvokiame, kad yra keturios bandymo baigtys: *HH, HS, SH, SS*. Pirmoji kiekvienos poros raidė reiškia varinės monetos metimo rezultatą, o antroji – sidabrinės. Todėl teisingas atsakymas yra $\frac{3}{4}$.

Nepriklausomų įvykių sąvoka leidžia šį ir panašius uždavinius spręsti nesudarant elementariųjų įvykių aibės. Pažymėkime įvykį

$$A = \text{„Bent vieną kartą atsivers herbas"}.$$

Tada

$$\overline{A} = \text{„Abu kartus atsivers skaičius"} =$$
$$= \text{„Pirmą kartą atsivers skaičius"} \cap \text{„Antrą kartą atsivers skaičius"} = B_1 \cap B_2 .$$

Kadangi įvykiai B_1 ir B_2 yra nepriklausomi, tai

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = \mathbf{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbf{P}(B_1) \cdot \mathbf{P}(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Todėl

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad ■$$

Galima nagrinėti daugiau negu du nepriklausomus įvykius arba bandymus.

2.14 apibrėžimas

Įvykiai $A_1, A_2, A_3, \ldots$ vadinami **nepriklausomais**, kai tų įvykių sankirtos tikimybė lygi jų tikimybių sandaugai, kad ir kokį imtume minėtų įvykių aibės poaibį.

Jei turime daugiau nei du įvykius, tai įvykių nepriklausomumas nėra tik nepriklausomumas poromis (kas du). Pavyzdžiui, kad trys įvykiai būtų nepriklausomi, reikia, kad bet kurių dviejų įvykių sankirtos tikimybė būtų lygi tikimybių sandaugai ir visų trijų įvykių sankirtos tikimybė būtų lygi įvykių tikimybių sandaugai, t.y. įvykiai A_1, A_2, A_3 bus nepriklausomi, jei

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2), \tag{2.8}$$

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_3), \tag{2.9}$$

$$\mathbf{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(A_3), \tag{2.10}$$

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(A_3). \tag{2.11}$$

2.11 pavyzdys. Monetą metame du kartus. Sakykime, kad

$A_1 = \{ HH, HS \}$ = „Pirmą kartą atsivertė herbas“,

$A_2 = \{ HH, SH \}$ = „Antrą kartą atsivertė herbas“,

$A_3 = \{ HS, SH \}$ = „Vieną kartą atsivertė herbas“.

Tada $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Nesunku pastebėti, kad

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbf{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} .$$

Įsitikinome, kad tenkinamos (2.8), (2.9) ir (2.10) lygybės, t.y. įvykiai A_1, A_2, A_3 kas du yra nepriklausomi. Apskaičiuokime

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0 .$$

Bet $\mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Matome, kad šiuo atveju $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(A_3)$, t.y. įsitikinome: iš to, kad kas du įvykiai yra nepriklausomi, neišplaukia, jog nepriklausomi yra trys įvykiai A_1, A_2 ir A_3. ■

2.12 pavyzdys. Dar kartą prisiminkime 2.6 pavyzdį (p. 31). Apibrėžkime įvykius

$A = \{ (r, b): b = 1, 2 \text{ arba } 5 \}$ = { „Baltojo kauliuko iškrito 1, 2 arba 5 akutės“ },

$B = \{ (r, b): b = 4, 5 \text{ arba } 6 \}$ = { „Baltojo kauliuko iškrito 4, 5 arba 6 akutės“ },

$C = \{ (r, b): r + b = 9 \}$ = { „Abiejų kauliukų iškritusių akučių suma lygi 9“ }.

Nesunku patikrinti, kad įvykiai A, B, C tenkina (2.11) lygybę, o lygybės (2.8), (2.9) ir (2.10) netenkina. Siūlome tai patikrinti savarankiškai. Šis pavyzdys tam tikra prasme yra priešingas 2.11 pavyzdžiui. ■

Dabar jau galime gana lengvai išspręsti 2.1 pavyzdyje minėtą Merė uždavinį.

2.7 uždavinys. Lošimo kauliukas metamas 4 kartus. Apskaičiuokite įvykio A = „Nė karto neiškris 6 akutės“ tikimybę.

Sprendimas. Pažymėkime

B_k = {„k-tąjį kartą metant kauliuką, neiškris 6 akutės“}, $k = 1, 2, 3, 4$. Tada

$$A = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4.$$

Kadangi įvykiai B_1, B_2, B_3, B_4 (kauliuko metimai) yra nepriklausomi, tai

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) = \mathbf{P}(B_1) \cdot \mathbf{P}(B_2) \cdot \mathbf{P}(B_3) \cdot \mathbf{P}(B_4) =$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 0{,}482.$$

Matome, jog tikimybė, kad laimės Merė, lygi

$$\mathbf{P}(\text{„Bent vieną kartą iškris 6 akutės“}) = \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) \approx 1 - 0{,}482 = 0{,}518.$$

Taigi galima teigti, kad žaisti šį žaidimą su Merė greičiausiai nebus naudinga. Tikimybė laimėti yra mažesnė už tikimybę pralaimėti. Tiesa, tai nereiškia, jog nepavyks keleto partijų laimėti. Gautas rezultatas tik parodo, kad, žaidžiant pakankamai daug kartų, Merė laimės vidutiniškai 51,8% partijų. Deja, kol kas negalime pasakyti, ką reiškia „pakankamai daug“. Į panašius klausimus atsako matematinės statistikos rezultatai. ■

2.8 uždavinys. Du medžiotojai vienu metu ir nepriklausomai vienas nuo kito šauna į kiškį. Kiškis nušaunamas, kai bent vienas medžiotojas pataiko. Raskite tikimybę nušauti kiškį, kai medžiotojų pataikymo tikimybės yra lygios 0,8 ir 0,7.

Sprendimas. Apskaičiuokime priešingojo įvykio „Kiškis nenušaunamas“ = $\overline{A}$ tikimybę.

Pažymėkime įvykius:

B_1 = „Pirmasis medžiotojas pataikė“, B_2 = „Antrasis medžiotojas pataikė“.

Kadangi $\mathbf{P}(B_1) = 0{,}8$, $\mathbf{P}(B_2) = 0{,}7$, $\overline{A} = \overline{B}_1 \cap \overline{B}_2$ ir įvykiai $\overline{B}_1, \overline{B}_2$ yra nepriklausomi, tai

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = \mathbf{P}(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2) = \mathbf{P}(\overline{B}_1) \cdot \mathbf{P}(\overline{B}_2) = (1 - \mathbf{P}(B_1)) \cdot (1 - \mathbf{P}(B_2)) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06.$$

Todėl $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 0{,}94$. ■

Spręsdami šį uždavinį, pasinaudojome gana akivaizdžiu teiginiu: jei įvykiai B_1 ir B_2 yra nepriklausomi, tai ir įvykiai $\overline{B}_1$ ir $\overline{B}_2$ nepriklausomi. Dabar tai nuosekliai įrodysime.

2.6 teorema

Jei įvykiai A ir B nepriklausomi, tai ir įvykių poros A ir $\overline{B}$, $\overline{A}$ ir B, $\overline{A}$ ir $\overline{B}$ – taip pat nepriklausomi įvykiai.

Įrodymas. Įrodysime, kad įvykiai $\overline{A}$ ir $\overline{B}$ yra nepriklausomi. Kitus du atvejus siūlome įrodyti savarankiškai. Naudojantis diagramomis, nesunku įsitikinti, kad

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}\,.$$

Todėl

$$\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbf{P}(\overline{A \cup B}) = 1 - \mathbf{P}(A \cup B). \tag{2.12}$$

Dabar prisiminsime (2.5) lygybę:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

Tęsdami (2.12), gauname:

$$\mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - (\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)) = 1 - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) =$$
$$= 1 - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B)(1 - \mathbf{P}(A)) = (1 - \mathbf{P}(A))(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(\overline{B}).$$

Teorema įrodyta. ■

Pateiksime priklausomų įvykių pavyzdį.

2.13 pavyzdys. Metame lošimo kauliuką. Apibrėžkime du įvykius

A = „Iškrito daugiau kaip 3 akutės",
B = „Iškrito lyginis akučių skaičius".

Įvykiui A, taip pat kaip ir įvykiui B, palankūs 3 elementarieji įvykiai iš šešių. Todėl

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Įvykis $A \cap B$ įvyks, jei iškris 4 arba 6 akutės. Todėl

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Tačiau

$$\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}.$$

Iš čia išplaukia, kad A ir B nėra nepriklausomi įvykiai. ■

UŽDAVINIAI

41. Metamos trys monetos. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:
a) „Nė vienos monetos neatsivertė herbas";
b) „Atsivertė bent vienos monetos herbas".
Ar šie įvykiai yra nesutaikomi? Ar šie įvykiai nepriklausomi?

42. Norint įvertinti laikraščių A ir B populiarumą buvo apklaustos šeimos. Nustatyta, kad 20% šeimų perka laikraštį A ir 30% šeimų perka laikraštį B. Taigi laikysime: tikimybė, kad šeima perka laikraštį A, yra $\mathbf{P}(A) = 0{,}2$, o kad perka laikraštį B – $\mathbf{P}(B) = 0{,}3$.
a) Ar galima įvykius A ir B laikyti nepriklausomais įvykiais? Pagrįskite savo nuomonę.
b) Kokia tikimybė, kad šeima perka bent vieną iš A ir B laikraščių, jei laikysime, kad šie įvykiai nepriklausomi?
c) Kokia to paties įvykio tikimybė, jei laikysime, kad įvykiai nesutaikomi?

43. Metama moneta ir lošimo kauliukas. Kokia tikimybė, kad iškris herbas, o kauliuko atsivertusių akučių skaičius bus lyginis?

44. Tikimybė, kad krepšininkas įmes baudos metimą, lygi 0,8. Kiek baudos metimų jis turėtų mesti, kad tikimybė pataikyti bent vieną kartą būtų ne mažesnė už 0,99?

45. Įvykiai A ir B yra nepriklausomi. Įrodykite, kad ir įvykiai A ir $\overline{B}$ bei $\overline{A}$ ir B yra nepriklausomi (2.6 teorema).

46. Gaminant detalę atliekamos 4 nepriklausomos operacijos. Tikimybė gauti broką po kiekvienos operacijos lygi 0,01. Apskaičiuokite tikimybę pagaminti gerą detalę.

47. Elektroninis įrenginys, turintis 5 sudėtines dalis, veikia tinkamai, jei visos 5 dalys veikia gerai. Kiekviena dalis veikia gerai su ta pačia tikimybe p ir genda nepriklausomai viena nuo kitos. Koks turėtų būti įrenginio dalių patikimumas p, kad viso įrenginio tinkamo veikimo tikimybė būtų ne mažesnė kaip 0,9?

48. Trys šauliai šauna į taikinį. Pirmojo šaulio pataikymo tikimybė 0,8, antrojo – 0,75, trečiojo – 0,7.
a) Kokia tikimybė pataikyti bent vieną kartą?
b) Kokia tikimybė pataikyti vieną kartą?
c) Kokia tikimybė pataikyti du kartus?

2.6. SĄLYGINĖ TIKIMYBĖ

2.14 pavyzdys. Sakykime, kad Lietuvoje prekiaujama elektros lemputėmis, pagamintomis dviejose gamyklose. Žinoma, kad 90% I gamyklos ir 80% II gamyklos produkcijos yra standartinė (standartinė, arba kokybiška, lemputė turi degti ne mažiau 1000 valandų). Be to, I gamykla gamina 60%, o II – 40% parduodamų elektros lempučių. Nesunku apskaičiuoti, kad 86% visos produkcijos yra standartinė. Todėl tikimybė nusipirkti kokybišką lemputę lygi 0,86. Tačiau tarkime, kad, atėję į parduotuvę, sužinome, jog ji prekiauja I gamyklos lemputėmis. Akivaizdu, kad šiuo atveju tikimybė nusipirkti kokybišką lemputę lygi 0,9. To paties įvykio „Nusipirkta kokybiška lemputė“ tikimybė pasikeitė. Kodėl taip atsitiko? Todėl, kad pasikeitė elementariųjų įvykių aibė. Nežinodami lemputes gaminančios gamyklos, rinkomės iš visų rinkoje esančių lempučių, sužinoję – tik iš pirmoje gamykloje pagamintų lempučių. Kitais žodžiais galėtume pasakyti, kad antras bandymas daromas esant papildomoms sąlygoms. ■

2.15 pavyzdys. Tarkime, kad jūs su draugu žaidžiate tokį žaidimą. Draugas meta lošimo kauliuką, o jūs nežiūrėdamas bandote atspėti atsivertusių akučių skaičių. Tikimybė atspėti lygi $\frac{1}{6}$. Dabar sakykime, kad prieš spėjant draugas jums pasako, jog atsivertė lyginis akučių skaičius. Aišku, kad, naudojantis šia informacija, tikimybė atspėti lygi $\frac{1}{3}$. Įvykio tikimybė pasikeitė sužinojus, kad jau įvyko kitas su nagrinėjamu bandymu susijęs įvykis – iškrito lyginis akučių skaičius (arba parduotuvėje parduodamos tik I gamykloje pagamintos lemputės). ■

Įvykių tikimybės, apskaičiuotos žinant, kad jau įvyko kitas su bandymu susijęs įvykis, vadinamos **sąlyginėmis**. Tikslų matematinį sąlyginės tikimybės apibrėžimą pateiksime vėliau. Dabar išspręskime uždavinį.

2.9 uždavinys. Dėžėje yra 2 balti ir 2 juodi vienodo didumo rutuliai. Nesirinkdami vieną po kito imame rutulius iš dėžės. Tarkime, kad pirma ištraukiame baltą rutulį. Apskaičiuokite tikimybę, kad po to ištrauksime paeiliui du juodus rutulius.

Sprendimas. Sudarykime elementariųjų įvykių aibę:

$$E = \{\ bbjj,\ bjbj,\ bjjb,\ jbbj,\ jbjb,\ jjbb\ \}\ .$$

(Aibės E elementas yra 4 raidžių rinkinys.) Rinkinys $bbjj$ žymi elementarųjį įvykį „Pirmasis ir antrasis paimtas rutulys buvo baltos spalvos, o trečiasis ir ketvirtasis – juodos“. Išrinkime tuos aibės E elementus, kurių pirmoji raidė yra b:

$$B = \{\ bbjj,\ bjbj,\ bjjb\ \}.$$

Raide A pažymėsime įvykį: „Paeiliui ištraukiami du juodi rutuliai“:

$$A = \{\ bbjj,\ bjjb,\ jjbb\ \}.$$

Laikydami, kad visų elementariųjų įvykių tikimybės yra lygios, gauname:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3}{6}, \qquad \mathbf{P}(B) = \frac{3}{6}.$$

Kadangi pirmasis ištrauktas rutulys yra baltas, elementariųjų įvykių aibę „sumažiname“, vietoj aibės E imdami aibę B. Kiekvieno aibės B elementariojo įvykio tikimybė lygi $\frac{1}{3}$. Du aibės B elementarieji įvykiai $bbjj$ ir $bjjb$ yra palankūs įvykiui A. Todėl elementariųjų įvykių aibėje B įvykio A tikimybė bus lygi $\frac{2}{3}$. Ši tikimybė ir vadinama sąlygine įvykio A tikimybe su sąlyga B. Tokią tikimybę žymėsime

$$\mathbf{P}(A \mid B).$$

Mūsų pavyzdyje

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{2}{3}.$$

Nesunkiai randame, kad

$$A \cap B = \{\ bbjj,\ bjjb\ \}.$$

Todėl

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{2}{6}.$$

Dabar pastebėsime, kad nagrinėjamame pavyzdyje

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(A \mid B), \qquad (2.13)$$

nes

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{3}\ . \quad \blacksquare$$

Išanalizavę daugiau panašių pavyzdžių, pamatytume, kad (2.13) lygybė teisinga visada. Patikrinkite, ar ji galioja 2.14 ir 2.15 pavyzdžiuose nagrinėjamiems įvykiams.

Suformuluosime sąlyginės įvykio tikimybės apibrėžimą.

2.15 apibrėžimas

Tarkime, kad įvykio B tikimybė $\mathbf{P}(B) > 0$. Tada sąlyginė įvykio A su sąlyga B tikimybė $\mathbf{P}(A \mid B)$ apibrėžiama lygybe:

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}. \tag{2.14}$$

P a s t a b a. Simbolis $A \mid B$ nėra kurios nors elementariųjų įvykių aibės žymėjimas. Prasmę turi tik simbolis $\mathbf{P}(A \mid B)$: jis žymi sąlyginę įvykio A tikimybę su sąlyga B.

2.10 uždavinys. Metame du lošimo kauliukus. Apibrėžiame įvykius A = „Iškritusių akučių suma lygi 7“ ir B = „Akučių skaičių sandauga neviršija 13“. Raskite įvykio A sąlyginę tikimybę su sąlyga B.

Sprendimas. Vartodami jau įprastus žymėjimus, galime užrašyti taip:

$$A = \{ (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) \}.$$

Todėl $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}$. Panašiai (galime naudotis 2.1 lentele, p. 31) randame, kad $\mathbf{P}(B) = \frac{23}{36}$. Kadangi $A \cap B = A$, tai iš (2.14) randame, kad

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{23}{36}} = \frac{6}{23}. \quad \blacksquare$$

2.11 uždavinys. Metami du lošimo kauliukai – raudonas ir baltas. Apskaičiuokite tikimybę, kad baltojo kauliuko atsivertusių akučių skaičius bus didesnis už 4, jei raudonojo kauliuko atsivertė 6 akutės.

Sprendimas. Pažymėkime

$$A = \{ b > 4 \}, \qquad B = \{ r = 6 \}.$$

Naudodamiesi 2.1 lentele, lengvai randame

$$\mathbf{P}(A) = \frac{12}{36}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{6}{36}.$$

Kadangi $A \cap B = \{ (6,5), (6,6) \}$, tai

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{2}{36}.$$

Įrašome apskaičiuotas tikimybes į (2.14) formulę:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3}.$$

Galėjome ir tiesiogiai gauti šį atsakymą. Įvykį B sudaro 6 vienodai galimi elementarieji įvykiai, iš kurių 2 yra palankūs įvykiui A, todėl

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Matome, kad šiame uždavinyje

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A\,|\,B) = \frac{1}{3},$$

t.y. sąlyginė įvykio A tikimybė sutampa su nesąlygine įvykio A tikimybe. Kitaip tariant, informacija, kad raudonojo kauliuko atsivertė 6 akutės, neturi įtakos tikimybei įvykio, kad baltojo kauliuko atsivertusių akučių skaičius bus didesnis už 4. Šio įvykio tikimybė lygi $\frac{1}{3}$ nepriklausomai nuo raudonojo kauliuko metimo rezultato. Tai pagrindžia 2.7 teorema. ■

2.7 teorema

Jei nepriklausomų įvykių A ir B tikimybės yra teigiamos, tai

$$\mathbf{P}(A\,|\,B) = \mathbf{P}(A) \quad \text{ir} \quad \mathbf{P}(B\,|\,A) = \mathbf{P}(B).$$

Įrodymas. Kadangi $A \cap B = B \cap A$ ir įvykiai A ir B yra nepriklausomi, tai

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B \cap A) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B). \qquad (2.15)$$

Šią lygybę galime padalyti iš $\mathbf{P}(B) \neq 0$. Remiantis sąlyginės tikimybės apibrėžimu (2.14),

$$\mathbf{P}(A\,|\,B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A).$$

Lygiai taip pat, padalinę (2.15) iš $\mathbf{P}(A)$, įrodome ir antrąjį teoremos teiginį

$$\mathbf{P}(B\,|\,A) = \mathbf{P}(B). \quad ■$$

UŽDAVINIAI

49. Metami du lošimo kauliukai – raudonas ir baltas. Raudonojo ir baltojo kauliuko iškritusių akučių skaičių pažymėkite atitinkamai r ir b. Apskaičiuokite sąlygines įvykių tikimybes:
a) $r = 6$ su sąlyga, kad $r + b \geq 10$;
b) $r \geq 3$ su sąlyga, kad $r + b = 9$;
c) $b \geq 4$ su sąlyga, kad $r = 5$;
d) $b = 6$ su sąlyga, kad $r \geq 3$;
e) $r + b = 7$ su sąlyga, kad $r + b \leq 15$;
f) $r + b = 5$ su sąlyga, kad $|r - b|$ – pirminis skaičius.

50. Įvykis A įvyksta visada, kai įvyksta įvykis B, t.y. kiekvienas elementarusis aibės B įvykis priklauso ir aibei A. Ką galima pasakyti apie tikimybę $\mathbf{P}(A\,|\,B)$? Paaiškinkite rezultatą.

51. Dėžėje yra 20 vienodo didumo rutulių. 8 balti rutuliai pažymėti skaitmeniu *1*, 7 balti – skaitmeniu *2*, 3 juodi — skaitmeniu *1* ir 2 juodi — skaitmeniu *2*.

Nežiūrint traukiamas rutulys. Apskaičiuokite tikimybę ištraukti baltą rutulį su sąlyga, kad jis bus pažymėtas skaitmeniu *2*.

52. Žinome, kad $\mathbf{P}(A) = 0{,}3$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}2$ ir $\mathbf{P}(A \cup B) = 0{,}4$. Apskaičiuokite tikimybes:

a) $\mathbf{P}(A \cap B)$; b) $\mathbf{P}(A \mid B)$; c) $\mathbf{P}(B \mid A)$; d) $\mathbf{P}(\overline{A} \mid B)$; e) $\mathbf{P}(A \mid \overline{B})$;

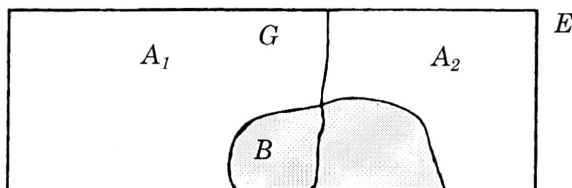
f) $\mathbf{P}(\overline{A} \mid \overline{B})$; g) $\mathbf{P}(B \mid \overline{A})$; h) $\mathbf{P}(\overline{B} \mid A)$; i) $\mathbf{P}(\overline{B} \mid \overline{A})$.

53. Moneta mėtoma tol, kol atsiverčia herbas arba kol tris kartus atsiverčia skaičius. Raskite tikimybę, kad moneta mesta tris kartus su sąlyga, kad pirmą kartą atsivertė skaičius.

54. Moneta mėtoma tol, kol atsiverčia herbas arba kol keturis kartus atsiverčia skaičius. Pirmus du kartus atsivertė skaičius. Raskite tikimybę, kad:
a) moneta mesta tris kartus;
b) moneta mesta keturis kartus.

2.7. PILNOSIOS TIKIMYBĖS FORMULĖ

Prisiminkime 2.14 pavyzdį. Pažymėkime įvykius
A_1 = „Lemputė pagaminta I gamykloje“,
A_2 = „Lemputė pagaminta II gamykloje“,
G = „Lemputė standartinė“,
B = „Lemputė nestandartinė“.



2.7 pav.

Elementariųjų įvykių aibė schemiškai pavaizduota 2.7 paveiksle. Laikysime, kad

$$\mathbf{P}(A_1) = 0{,}6, \qquad \mathbf{P}(A_2) = 0{,}4,$$

$$\mathbf{P}(G \mid A_1) = 0{,}9, \qquad \mathbf{P}(G \mid A_2) = 0{,}8.$$

Apskaičiuosime nesąlyginę įvykio G tikimybę. Įvykiai A_1 ir A_2 yra nesutaikomi ir sudaro elementariųjų įvykių aibės E skaidinį: $E = A_1 \cup A_2$. Todėl įvykiai $G \cap A_1$ ir $G \cap A_2$ taip pat yra nesutaikomi ir

$$G = (G \cap A_1) \cup (G \cap A_2) .$$

(Standartinė lemputė gali būti pagaminta arba I gamykloje, arba II gamykloje.) Todėl, remiantis 2.1 teorema,

$$\mathbf{P}(G) = \mathbf{P}(G \cap A_1) + \mathbf{P}(G \cap A_2) . \qquad (2.16)$$

Iš sąlyginės tikimybės apibrėžimo išplaukia, kad

$$\mathbf{P}(G \cap A_1) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(G | A_1) \ ,$$

$$\mathbf{P}(G \cap A_2) = \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(G | A_2) \ .$$

Įrašę šias tikimybių išraiškas į (2.16) lygybę, gauname:

$$\mathbf{P}(G) = \mathbf{P}(G | A_1) \cdot \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(G | A_2) \cdot \mathbf{P}(A_2) \ . \quad (2.17)$$

Ši lygybė – tai atskiras pilnosios tikimybės formulės atvejis, kai elementariųjų įvykių aibės skaidinį sudaro dvi aibės: A_1 ir A_2. Įrašę skaitines tikimybių reikšmes į (2.17), gausime

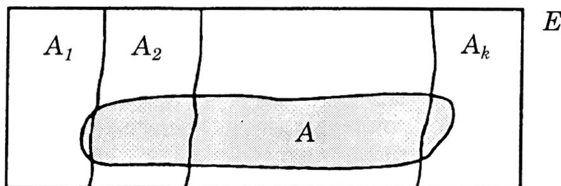
$$\mathbf{P}(G) = 0{,}9 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}86 \ . \quad ■$$

PILNOSIOS TIKIMYBĖS FORMULĖ

2.2 teorema

Jei elementariųjų įvykių aibės E skaidinį sudaro k poaibių:
$E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$,
ir $\mathbf{P}(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, tai bet kurio įvykio A tikimybę galima apskaičiuoti taip:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A | A_1) \cdot \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A | A_2) \cdot \mathbf{P}(A_2) + \dots + \mathbf{P}(A | A_k) \cdot \mathbf{P}(A_k). \quad (2.18)$$



2.8 pav.

Įrodymas. Kadangi įvykiai $A_1, A_2, \dots, A_k$ yra nesutaikomi, tai ir įvykiai $A \cap A_1, A \cap A_2, \dots, A \cap A_k$ yra nesutaikomi ir

$$A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup \dots \cup (A \cap A_k) \ .$$

Todėl

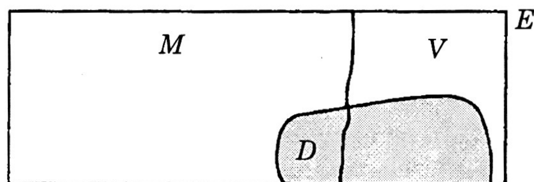
$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap A_1) + \mathbf{P}(A \cap A_2) + \dots + \mathbf{P}(A \cap A_k). \quad (2.19)$$

Iš sąlyginės tikimybės apibrėžimo išplaukia, kad

$$\mathbf{P}(A \cap A_i) = \mathbf{P}(A | A_i) \cdot \mathbf{P}(A_i), \ i = 1, \dots, k. \quad (2.20)$$

Įrašę (2.20) lygybes į (2.19) formulę, gauname įrodomąją (2.18) formulę. ■

2.12 uždavinys. Medicinininiai tyrimai rodo, kad 5% vyrų ir 0,25% moterų yra daltonikai. Iš suaugusių žmonių grupės, kurią sudarė 400 moterų ir 60 vyrų, atsitiktinai pasirinktas žmogus pasirodė esąs daltonikas. Kokia tikimybė, kad pasirinktas vyras? Moteris?



2.9 pav.

Sprendimas. Pažymėkime įvykius
M = „Pasirinkta moteris",
V = „Pasirinktas vyras",
D = „Pasirinktas daltonikas".
Sąlygoje duotos šios tikimybės

$$\mathbf{P}(D|V) = 0{,}05 = \frac{1}{20}, \qquad \mathbf{P}(D|M) = 0{,}0025 = \frac{1}{400},$$

$$\mathbf{P}(M) = \frac{400}{460} = \frac{20}{23}, \qquad \mathbf{P}(V) = \frac{60}{460} = \frac{3}{23}.$$

Turime apskaičiuoti sąlygines tikimybes $\mathbf{P}(V\,|\,D)$ ir $\mathbf{P}(M\,|\,D)$. Remiantis sąlyginės tikimybės apibrėžimu,

$$\mathbf{P}(V\,|\,D) = \frac{\mathbf{P}(V \cap D)}{\mathbf{P}(D)}. \tag{2.21}$$

Taikysime pilnosios tikimybės formulę (k = 2). Tada

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(D\,|\,V) \cdot \mathbf{P}(V) + \mathbf{P}(D\,|\,M) \cdot \mathbf{P}(M) = \frac{1}{20} \cdot \frac{3}{23} + \frac{1}{400} \cdot \frac{20}{23} = \frac{4}{460}.$$

Liko apskaičiuoti $\mathbf{P}(V \cap D)$. Vėl remiamės sąlyginės tikimybės apibrėžimu:

$$\mathbf{P}(V \cap D) = \mathbf{P}(V) \cdot \mathbf{P}(D\,|\,V) = \frac{3}{23} \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{460}.$$

Įrašome apskaičiuotas tikimybes į (2.21) formulę:

$$\mathbf{P}(V\,|\,D) = \frac{\frac{3}{460}}{\frac{4}{460}} = \frac{3}{4}.$$

Panašiai randame ir tikimybę, kad atsitiktinai pasirinktas daltonikas bus moteris $\mathbf{P}(M|D) = \frac{1}{4}$. ∎

UŽDAVINIAI

55. 90% įmonėje pagamintų detalių yra geros kokybės. Kontrolierius pagal išorinius požymius atrenka detales tikrinimui. Taip tikrinimui atrenkama 60% pagamintų prastos kokybės detalių ir 20% iš geros kokybės detalių. Kokia tikimybė tarp tikrinimui atrinktų detalių rasti prastos kokybės detalę?

56. Medicinos praktika rodo, kad skirtingų ligų požymiai gali būti tokie patys. Pažymėkime tam tikrą ligos požymių grupę raide H ir laikykime tai įvykiu H, galimu tik sergant viena iš trijų ligų – A, B arba C. Taip pat laikykime, kad įvykiai A, B ir C yra nesutaikomi ir jų tikimybės

$$\mathbf{P}(A) = 0{,}01, \quad \mathbf{P}(B) = 0{,}005, \quad \mathbf{P}(C) = 0{,}02 .$$

Tikimybės pasireikšti požymiams H sergant kiekviena iš ligų yra:

$$\mathbf{P}(H \mid A) = 0{,}9, \quad \mathbf{P}(H \mid B) = 0{,}95, \quad \mathbf{P}(H \mid C) = 0{,}75 .$$

Kokia tikimybė, kad ligonis serga:
a) liga A, jei jam pasireiškė ligos požymiai H;
b) liga B, jei jam pasireiškė ligos požymiai H;
c) liga C, jei jam pasireiškė ligos požymiai H?

2.8. ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

Dažnai bandymo rezultatas yra atsitiktinis įvykis, kurį atitinka kuris nors skaičius. Pavyzdžiui, galime laikyti, kad, mesdami kauliuką, gauname vieną iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, t.y. atsivertusių akučių skaičių. Taigi kiekvieną šio bandymo baigtį E_k atitinka vienintelis skaičius k.

Atsitiktiniais dydžiais taip pat galime laikyti žmogaus ūgį ar masę, vandens lygį upėje, lietingų dienų skaičių per metus, avarijų skaičių per savaitę ir t. t. Matematinis atsitiktinio dydžio apibrėžimas toks:

2.16 apibrėžimas

Atsitiktiniu dydžiu vadinama reali funkcija, apibrėžta bandymo baigčių aibėje, t.y. elementariųjų įvykių aibėje.

Atsitiktinius dydžius žymėsime raidėmis X, Y, Z ir pan.

2.16 pavyzdys. Metamos dvi monetos. Herbu atsivertusių monetų skaičių pažymėkime X. Tas skaičius bus atsitiktinis dydis. Bandymo baigtys ir tų baigčių tikimybės pateikiamos šioje lentelėje:

2.2 lentelė

Elementarusis įvykis	E_1	E_2	E_3	E_4
Pirmoji moneta Antroji moneta	S S	S H	H S	H H
$\mathbf{P}(E_i)$	1/4	1/4	1/4	1/4
$X(E_i)$	0	1	1	2

Jei bandymo baigtis yra elementarusis įvykis

$$E_1 = \text{„Abiejų monetų atsivertė skaičius“},$$

tai atsitiktinis dydis X, rodantis, kiek monetų atsivertė herbu, įgyja reikšmę $X = X(E_1) = 0$. Panašiai

$$X(E_2) = 1, \qquad X(E_3) = 1, \qquad X(E_4) = 2.$$

Šį atsitiktinį dydį patogu nusakyti lentele:

Elementarusis įvykis (bandymo baigtis)	E_1	E_2	E_3	E_4
X	0	1	1	2

Tikimybė, su kuria atsitiktinis dydis X įgyja kiekvieną iš galimų reikšmių, randama sudedant kiekvieną reikšmę atitinkančių elementariųjų įvykių tikimybes. Mūsų pavyzdyje:

$\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(E_1) = 1/4,$
$\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(E_2) + \mathbf{P}(E_3) = 1/4 + 1/4 = 1/2,$
$\mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(E_4) = 1/4.$

Dažniausiai atsitiktinis dydis apibrėžiamas nurodant jo įgyjamas reikšmes ir tikimybes, su kuriomis tos reikšmės įgyjamos. Nagrinėjamą atsitiktinį dydį X galima apibrėžti lentele:

X	0	1	2
$\mathbf{P}$	1/4	1/2	1/4

Matome, kad

$$\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) = 1 . \quad \blacksquare$$

Taigi atsitiktinį dydį, įgyjantį baigtinį skaičių reikšmių, irgi patogu nusakyti lentele:

Baigtys	E_1	E_2	...	E_k	...	E_n
X	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n

Visą informaciją apie atsitiktinį dydį teikia jo įgyjamos reikšmės ir tikimybės, su kuriomis tos reikšmės įgyjamos: $p_k = \mathbf{P}(E_k) = \mathbf{P}(X = x_k)$. Šiuos duomenis galima pateikti lentelėje:

2.3 lentelė

Baigtys	E_1	E_2	...	E_k	...	E_n
X	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
$\mathbf{P}$	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

Kai kurios iš 2.3 lentelėje nurodomų atsitiktinio dydžio reikšmių gali sutapti (2.2 lentelėje (p. 59) $x_2 = x_3$).

2.17 apibrėžimas
Lentelė

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

vadinama atsitiktinio dydžio **skirstiniu**.

Šioje lentelėje visos atsitiktinio dydžio reikšmės x_i yra skirtingos, o tikimybių suma $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

2.18 apibrėžimas
Atsitiktinio dydžio X **matematine viltimi** (**vidurkiu**) vadinamas skaičius

$$\mathbf{E}X = x_1 p_1 + ... + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k . \quad (2.22)$$

2.17 pavyzdys. Metamas lošimo kauliukas. Atsitiktinis dydis – atsivertusių akučių skaičius. Jo skirstinys yra toks:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Šio atsitiktinio dydžio matematinė viltis

$$\mathbf{E}X = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6 = 3{,}5. \quad \blacksquare$$

2.13 uždavinys. Parduota 1000 loterijos bilietų po 1 Lt. Iš jų du bilietai laimingi: vienas laimėjimas – 500 litų, kitas – 100 litų. Apskaičiuokite vidutinį laimėjimo dydį (laimėjimo matematinę viltį), jei pirktas: a) vienas bilietas; b) du bilietai?

Sprendimas. a) Laimėtą (ar pralaimėtą) pinigų sumą laikysime atsitiktiniu dydžiu X. Reikia apskaičiuoti šio atsitiktinio dydžio matematinę viltį. Sudarome lentelę:

X	–1	99	499
P	$\frac{998}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

Todėl laimėjimo matematinė viltis

$$\mathbf{E}X = (-1) \cdot \frac{998}{1000} + 99 \cdot \frac{1}{1000} + 499 \cdot \frac{1}{1000} = -\frac{400}{1000} = -\,0{,}4 .$$

b) Laimėtą ar pralaimėtą sumą vėl pažymėkime X:

X	–2	98	498	598
P	p_1	p_2	p_3	p_4

Čia:

$$p_1 = \mathbf{P}(X = -2) = \frac{C_{998}^2}{C_{1000}^2} = \frac{497503}{499500},$$

$$p_2 = \mathbf{P}(X = 98) = \frac{998}{499500},$$

$$p_3 = \mathbf{P}(X = 498) = \frac{998}{499500},$$

$$p_4 = \mathbf{P}(X = 598) = \frac{1}{499500}.$$

Todėl laimėjimo matematinė viltis perkant du bilietus lygi:

$$\mathbf{E}X = (-2)p_1 + 98p_2 + 498p_3 + 598p_4 = -\ 0{,}8. \quad \blacksquare$$

Dažnai tenka nagrinėti atsitiktinių dydžių funkcijas. Tai nauji atsitiktiniai dydžiai – bandymo baigčių sudėtinės funkcijos $f(X)$. Atsitiktinio dydžio X funkcija $f(X)$ išreiškiama lentele:

Baigtys	E_1	E_2	...	E_n
X	x_1	x_2	...	x_n
$f(X)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$
P	p_1	p_2	...	p_n

Atsitiktinio dydžio $f(X)$ matematinė viltis lygi

$$\mathbf{E}f(X) = f(x_1)p_1 + f(x_2)p_2 + ... + f(x_n)p_n. \qquad (2.23)$$

2.18 pavyzdys. Metamas lošimo kauliukas. X – iškritęs akučių skaičius, $f(X) = X^2$. Apskaičiuosime $\mathbf{E}f(X)$. Sudarome lentelę:

X	1	2	3	4	5	6
$f(X)$	1	4	9	16	25	36
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Remiantis (2.23) lygybe,

$$\mathbf{E}f(X) = \mathbf{E}X^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = 91/6. \quad \blacksquare$$

Atsitiktinio dydžio matematinė viltis yra skaičius, apie kurį „išsibarsčiusios“ atsitiktinio dydžio reikšmės. Jei įsivaizduosime skaičių tiesėje pažymėtas atsitiktinio dydžio X reikšmes x_k ir taškuose x_k padėtus p_k masės materialiuosius taškus, tai matematinė viltis $\mathbf{E}X$ reikš šios įsivaizduojamos sistemos masės centrą.

Atsitiktinio dydžio „išsibarstymo“ dydį apibūdina kita skaitinė charakteristika – **dispersija**.

2.19 apibrėžimas

Atsitiktinio dydžio X **dispersija** vadinamas skaičius

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}\,(X - \mathbf{E}X)^2.$$

2.19 pavyzdys. Rasime matematinę viltį ir dispersiją atsitiktinio dydžio X, kurio skirstinys nurodytas lentelėje:

X	1	0
P	p	q

$$q = 1 - p.$$

Remiantis (2.22) lygybe,

$$\mathbf{E}X = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p\,.$$

Randame atsitiktinių dydžių $X - \mathbf{E}X$ ir $(X - \mathbf{E}X)^2$ skirstinį:

$X - \mathbf{E}X$	q	$-p$
$(X - \mathbf{E}X)^2$	q^2	p^2
P	p	q

Todėl

$$\mathbf{D}X = \mathbf{E}\,(X - \mathbf{E}X)^2 = q^2 p + p^2 q = pq(p + q) = pq. \quad \blacksquare$$

UŽDAVINIAI

57. Žaidėjai A ir B žaidžia žaidimą. Metama moneta. Jei atsiverčia herbas, tai žaidėjas A gauna iš žaidėjo B 10 centų; jei atsiverčia skaičius, tai žaidėjas A moka žaidėjui B 10 centų. Parašykite atsitiktinio dydžio X, reiškiančio žaidėjo A išloštą sumą, skirstinį. Raskite jo matematinę viltį ir dispersiją.

58. Metamas lošimo kauliukas. Jei iškrenta mažiau nei 5 akutės, tai žaidėjas A moka žaidėjui B 10 centų, jei iškrenta daugiau nei 4 akutės, tai gauna iš žaidėjo B 20 centų. Parašykite atsitiktinio dydžio, reiškiančio žaidėjo A išloštą sumą, skirstinį. Raskite jo matematinę viltį ir dispersiją.

59. Lentelėje apibrėžti bandymo su vienodai tikėtinomis baigtimis atsitiktiniai dydžiai:

Baigtys	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
X	5	2	–1	2	3	5
Y	2	0	0	–2	3	0
Z	4	1	0	0	–1	–4

Parašykite atsitiktinių dydžių X, Y, Z skirstinius. Apskaičiuokite jų matematines viltis ir dispersijas.

60. Apskaičiuokite 2.17 pavyzdyje (p. 61) apibrėžto atsitiktinio dydžio (atsivertusių lošimo kauliuko akučių skaičiaus) dispersiją.

61. Atsitiktinių dydžių X ir Y skirstiniai išreikšti lentelėmis:

X	0	1	2	3
P	1/8	1/4	1/2	1/8

Y	0	1	2	3
P	0,1	0,5	0,3	0,1

Apskaičiuokite tų dydžių matematines viltis ir dispersijas.

62. Atsitiktinis dydis gali įgyti tik vieną reikšmę su tikimybe, lygia 1. Įrodykite, kad šio atsitiktinio dydžio dispersija lygi nuliui.

2.9. BINOMINIAI (BERNULIO) BANDYMAI

Praktikoje dažnai susiduriame su bandymais, panašiais į monetos mėtymą, kai daug kartų kartojamas tas pats bandymas, turintis dvi galimas baigtis.

2.20 apibrėžimas

Binominiu bandymu vadinamas šias savybes turintis bandymas.

1. Bandymas susideda iš n (n=1, 2, 3, ...) vienodų bandymų, kurių kiekvienas turi dvi baigtis. Kitaip tariant, kiekvieno bandymo metu stebime tą patį įvykį A, kuris gali įvykti ar neįvykti.

2. Stebimo įvykio A tikimybė $\mathbf{P}(A) = p$ pastovi kiekviename iš bandymų, o $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - p = q$.

3. Visi n bandymų yra nepriklausomi.

Binominiai bandymai dar vadinami Bernulio (*Jacob Bernoulli*, 1654–1706, šveicarų matematikas) bandymais arba Bernulio bandymų schema.

Pavyzdys. Moneta metama 10 kartų ($n = 10$). Stebime herbo pasirodymą (įvykį A). Tai binominis bandymas, kuriame stebimo įvykio A tikimybė $\mathbf{P}(A) = p = 1/2$. ■

Pavyzdys. Lošimo kauliukas metamas 5 kartus ($n = 5$). Stebime šešių akučių atsivertimą (įvykį A). Tai binominis bandymas, kuriame stebimo įvykio A tikimybė $\mathbf{P}(A) = p = 1/6$. ■

2.20 pavyzdys. Sakykime, Lietuvoje yra 2,5 milijono rinkėjų ir mus domina, kuri dalis rinkėjų pritaria naujajam įstatymo projektui. Atsitiktinai pasirenkame ir apklausiame 1000 rinkėjų. Ar tai binominis bandymas? Patikrinsime binominio bandymo savybes:

1. Bandymas susideda iš $n = 1000$ vienodų bandymų, t. y. iš 1000 žmonių apklausos, kai kiekvienas iš jų į klausimą atsako „Taip“ arba „Ne“.
2. Atsakymo „Taip“ tikimybė yra lygi daliai visų rinkėjų, pritariančių įstatymo projektui. Pavyzdžiui, jei 2 milijonai rinkėjų pritaria įstatymui, tai tikimybė pasirinkti apklausai rinkėją, kuris atsakys „Taip,“ lygi 4/5. Tiesa, apklaustas rinkėjas paprastai tolesnėje apklausoje nedalyvauja ir dėl to tikimybė išgirsti „Taip“ šiek tiek pasikeičia, tačiau praktiniams tikslams tai įtakos neturi (tikimybė keičiasi milijonąja dalimi).
3. Galime laikyti, kad vienų rinkėjų atsakymai neturi įtakos kitų nuomonei.

Taigi šis bandymas gali būti laikomas binominiu bandymu. ■

2.21 pavyzdys. Į parduotuvę atvežė 20 televizorių. Tarkime, kad 3 iš jų neveikia, tačiau pardavėjas to nežino. Jis nori patikrinti 5 atsitiktinai pasirinktus televizorius. Kiekvienas patikrinimas (bandymas) turi dvi galimas baigtis – televizorius veikia arba ne, todėl 2.20 apibrėžimo 1-oji sąlyga patenkinta. Tikimybė, kad pirmas patikrintas televizorius neveiks, lygi 3/20. Sakykime, kad pirmas televizorius pasitaikė neveikiantis. Tada tikimybė, kad neveiks antras tikrinamas televizorius, lygi 2/29, t.y. stebimo įvykio A = „Televizorius neveikia“ tikimybė pasikeitė: ji priklauso nuo pirmo bandymo rezultato. Taigi šis bandymas neturi 2-osios ir 3-osios binominio bandymo savybės, todėl nėra binominis. ■

Atliekant binominį bandymą, mus labiausiai domina, keliuose iš n bandymų įvyko įvykis A. Tą skaičių – atsitiktinį dydį – žymėsime raide X.

Sakykime, $n = 1$.

Elementarieji įvykiai	$E_1 = A$	$E_2 = \overline{A}$
X	1	0
$\mathbf{P}(E_i)$	p	$q = 1 - p$

Sakykime, $n = 2$. Elementariųjų įvykių tikimybes apskaičiuoti paprasta remiantis bandymų nepriklausomumu:

$$\mathbf{P}(E_1) = \mathbf{P}(AA) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(A) = p^2,$$

$$\mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(A\overline{A}) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}) = pq,$$

$$\mathbf{P}(E_3) = \mathbf{P}(\overline{A}A) = \mathbf{P}(\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(A) = qp,$$

$$\mathbf{P}(E_4) = \mathbf{P}(\overline{A}\,\overline{A}) = \mathbf{P}(\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}) = q^2;$$

čia, pavyzdžiui, $A\overline{A}$ žymi tokią dviejų bandymų baigtį, kai pirmajame bandyme įvykis A įvyko, o antrajame – neįvyko.

Elementarieji įvykiai	$E_1 = AA$	$E_2 = A\overline{A}$	$E_3 = \overline{A}A$	$E_4 = \overline{A}\,\overline{A}$
X	2	1	1	0
$\mathbf{P}(E_i)$	p^2	pq	qp	q^2

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = 1.$$

2.11 teorema

Tikimybė, kad binominiame bandyme įvykis A įvyks k kartų iš n $(k = 0, 1, 2, ..., n)$ lygi:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (2.24)$$

Įrodymas. Vienas iš palankių elementariųjų įvykių yra toks

$$E_1 = \underbrace{AA \ldots A}_{k}\underbrace{\overline{A}\,\overline{A} \ldots \overline{A}}_{n-k}.$$

Tikimybė

$$\mathbf{P}(E_1) = \underbrace{\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(A) \ldots \mathbf{P}(A)}_{k} \cdot \underbrace{\mathbf{P}(\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}) \ldots \mathbf{P}(\overline{A})}_{n-k} = p^k q^{n-k}.$$

Kitų mus dominančiam įvykiui palankių elementariųjų įvykių tikimybės yra lygiai tokios pat (įvykių sankirta nesikeičia keičiant įvykius vietomis). Lieka rasti palankių elementariųjų įvykių skaičių. Pasirinkti tuos k bandymų iš n, kuriuose įvyksta įvykis A, galima C_n^k būdų. Todėl ieškoma tikimybė

$$P_n(k) = \mathbf{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Įrašę C_n^k išraiškas, gauname

$$P_n(k) = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k(k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \cdot p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k q^{n-k}. \quad \blacksquare$$

2.14 uždavinys. Monetą metėme 4 kartus. Raskite tikimybę, kad 2 kartus atsivertė herbas.

Sprendimas. Tai binominis bandymas, kai $n = 4$ ir $k = 2$. Aišku, kad $p = 1/2$. Reikia rasti $P_4(2)$. Iš (2.24) formulės

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^{4-2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} p^2 (1-p)^2 = 6 \cdot (1/2)^4 = 3/8. \quad \blacksquare$$

2.15 uždavinys. Žinoma, kad 1% pagamintų detalių yra nekokybiškos. Tikrinama 100 detalių. Raskite tikimybes įvykių:

a) A_0 = „Visos detalės geros kokybės“;

b) A_1 = „Viena detalė nekokybiška“;

c) B = „Ne daugiau kaip dvi detalės nekokybiškos“.

Sprendimas. Tai binominis bandymas, kai $n = 100$, $p = 0{,}01$. Todėl

$$\mathbf{P}(A_0) = C_{100}^0 (1-p)^{100} = (0{,}99)^{100} \approx 0{,}366,$$

$$\mathbf{P}(A_1) = C_{100}^1 (0{,}01)^1 \cdot (0{,}99)^{99} = 0{,}99^{99} \approx 0{,}3697.$$

Apibrėžkime įvykį

A_2 = „Dvi detalės nekokybiškos“.

Tada

$$\mathbf{P}(A_2) = P_{100}(2) = C_{100}^2 (0{,}01)^2 \cdot (0{,}99)^{98} = \frac{100 \cdot 99}{2 \cdot 1} (0{,}01)^2 \cdot (0{,}99)^{98} =$$

$$= \frac{1}{2} (0{,}99)^{99} \approx 0{,}1849.$$

Kadangi $B = A_0 \cup A_1 \cup A_2$, o įvykiai A_0, A_1 ir A_2 yra nesutaikomi, tai

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_0) + \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) \approx 0{,}92. \quad \blacksquare$$

UŽDAVINIAI

63. Pavaizduokite grafiškai taškus $(k, P_n(k))$, kai $n = 6$, o $p = 0{,}1$. Palyginkite šį grafiką su grafikais, kai $p = 0{,}5$ ir $p = 0{,}9$.

64. Apdrausta 80% automobilių. Keturi automobiliai pateko į avariją. Apskaičiuokite tikimybę, kad:

a) du iš jų apdrausti;

b) bent vienas iš jų apdraustas.

65. Su kuriomis p reikšmėmis teisingos lygybės: a) $P_3(0) = P_3(1)$; b) $P_3(0) = P_3(3)$?

66. Laikant egzaminą reikia atsakyti į 6 klausimus. Duoti 4 galimi kiekvieno klausimo atsakymai, kurių vienas yra teisingas. Apskaičiuokite tikimybę spėjant teisingai atsakyti bent į 5 klausimus.

67. Tikimybė, kad šaulys pataikys į taikinį, lygi 0,8. Kokia tikimybė, kad bus taiklūs: a) 9 iš 10 šūvių; b) bent vienas šūvis iš 10?

68. Binominis bandymas kartojamas 3 kartus ($n = 3$). Tikimybė, kad stebimas įvykis A įvyks du kartus, yra 12 kartų didesnė negu tikimybė, kad įvykis A įvyks 3 kartus. Raskite p.

69. Keturis kartus metame lošimo kauliuką. Kiekvieną kartą žiūrime, ar iškris daugiau nei 4 akutės. Apskaičiuokite tikimybes, kad stebimas įvykis įvyks:
a) du kartus; c) bent du kartus;
b) tris kartus; d) bent tris kartus.

70. Žaidžiame su lygiaverčiu priešininku. Kas labiau tikėtina:
a) laimėti 4 partijas iš 5 ar 6 iš 8 ;
b) laimėti bent 4 partijas iš 5 ar bent 6 iš 8 ?

71. Monetą metame 4 kartus. Raide A pažymėkime įvykį, kad herbas atsivers ne daugiau kaip kartą, o B, — kad iš 4 metimų herbas atsivers:
a) vieną kartą; c) tris kartus;
b) du kartus; d) keturis kartus.
Patikrinkite, ar įvykiai A ir B yra nepriklausomi.

72.*Įrodykite, kad binominė tikimybė $P_n(k)$ yra didžiausia (įgyja didžiausią reikšmę kintant argumentui k), kai
a) $k = [(n+1)p]$, jei $(n+1)p$ nėra sveikasis skaičius;
b) $k = (n+1)p-1$ ir $k = (n+1)p$, jei $(n+1)p$ yra sveikasis skaičius.

3 SKYRIUS
STATISTIKOS PRADMENYS

Dar gerokai pr. Kr. egzistavo „valstybinė aritmetika“. Žodis *statistika* greičiausiai yra kilęs iš lotyniško žodžio *status* – valstybė. Nuo senų laikų vyko gyventojų apskaita. Taip valdovai išsiaiškindavo, kiek gali surinkti kareivių, kokia mokesčių suma papildys valstybės iždą. Iš Biblijos žinoma, kad jau Mozė skaičiavo vyrus, vyresnius nei 20 metų.

Statistika plačiąja prasme reiškia skaitinės informacijos rinkimą, sutvarkymą ir tyrimą.

Matematinės statistikos uždavinys yra toks: ištyrus atsitiktinai parinktą objektų aibės dalį, gauti pagrįstas išvadas apie visą objektų aibę.

Pavyzdys. Fabrikas gamina elektros lemputes. Lemputės kokybė matuojama visu laiku, kurį ji dega, kol perdega. Taigi, norint nustatyti ar lemputė yra kokybiška, tektų ją sugadinti. Akivaizdu, kad galima tirti tik dalį lempučių. Remiantis ištirtųjų lempučių savybėmis, daromos išvados apie visų toje gamykloje gaminamų lempučių kokybę. ■

3.1. IMTIS. IMTIES HISTOGRAMA

Statistiniam tyrimui išrinkta tiriamų objektų visumos dalis vadinama **imtimi.**

Dažniausiai imtį sudaro skaičiai – kurių nors atsitiktinių dydžių reikšmės. Imties elementai dar vadinami stebėjimo duomenimis ir žymimi $x_1, x_2, ..., x_n$.

3.1 pavyzdys. Lošimo kauliuką metėme 10 kartų ($n = 10$). Lentelėje surašyti stebėjimo duomenys – iškritusių akučių skaičiai.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
2	6	4	6	5	2	1	2	3	1

3.2 pavyzdys. Sakykime, kad centimetro tikslumu pamatavome 40 šešiolikmečių jaunuolių ūgį ir užrašėme matavimo rezultatus:

155, 170, 169, 186, 182, 173, 177, 171, 169, 159,
191, 186, 183, 158, 149, 167, 174, 176, 170, 179,
171, 175, 182, 183, 168, 173, 172, 192, 181, 177,
179, 173, 175, 169, 174, 180, 183, 177, 187, 173.

Šie skaičiai – tai nesutvarkyta informacija. Remiantis tokia nesutvarkyta informacija, sunku daryti kokias nors išvadas, ypač kai skaičių yra keletas tūkstančių. Todėl statistiniai duomenys vaizduojami grafiškai įvairiomis diagramomis.

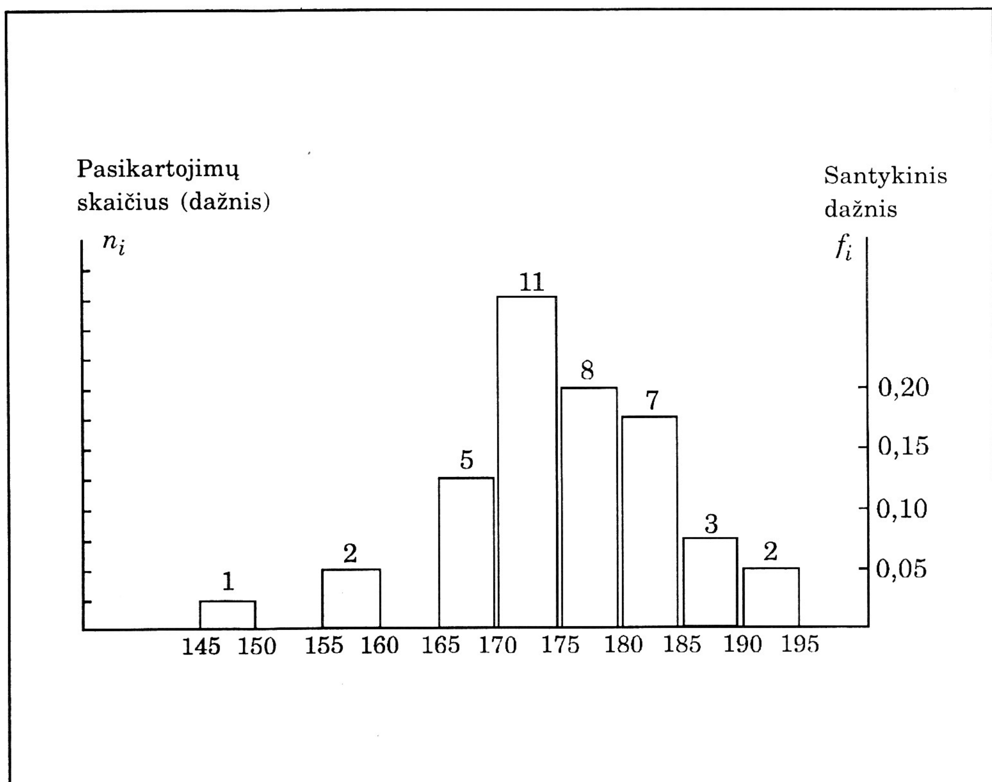
Stulpelinė diagrama vadinama **histograma**.

Kaip braižoma histograma? Pirmiausia randamas mažiausias ir didžiausias imties narys. Mūsų pavyzdyje tai skaičiai 149 ir 192. Gautas intervalas [149; 192] suskirstomas į smulkesnes dalis (intervalus) atsižvelgiant į duomenų skaičių. Dažniausiai pasirenkama nuo 5 iki 20 intervalų. Kuo daugiau duomenų, tuo daugiau paprastai pasirenkama intervalų. Dalijimo taškais pasirenkami patogesni suapvalinti skaičiai. Kartais šie skaičiai pasirenkami taip, kad nesutaptų su stebėjimo rezultatais. Šiame pavyzdyje intervalą [145; 195] dalysime į 10 lygių intervalų. Prieš braižant histogramą, patogu sudaryti lentelę:

3.1 lentelė

Intervalo Nr.	Intervalas	Žymės	Patekimo dažnis (n_i)	Santykinis dažnis (f_i)
1	[145; 150)	I	1	0,025
2	[150; 155)		0	0
3	[155; 160)	II	2	0,05
4	[160; 165)		0	0
5	[165; 170)	~~IIII~~	5	0,125
6	[170; 175)	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11	0,275
7	[175; 180)	~~IIII~~ III	8	0,2
8	[180; 185)	~~IIII~~ II	7	0,175
9	[185; 190)	III	3	0,075
10	[190; 195)	II	2	0,05
		Iš viso:	40	1

Trečiajame lentelės stulpelyje nuosekliai žymimi į intervalą patenkantys imties elementai. Stebėjimo duomenų reikšmių intervalas šiek tiek praplėstas. Taip daroma dažnai, ypač tais atvejais, kai turimus duomenis tikimasi papildyti. Naudojantis 3.1 lentele, jau nesunku nubraižyti imties histogramą. Virš kiekvieno intervalo braižomas stulpelis, kurio aukštis lygus į tą intervalą patekusių duomenų skaičiui (dažniui) n_i arba santykiniam dažniui $f_i = \frac{n_i}{n}$. Aišku, kad dažnių n_i ir santykinių dažnių f_i histograma skiriasi tik masteliu.



3.1 pav.

Histograma yra vienas paprasčiausių ir labiausiai paplitusių statistinių duomenų pateikimo būdų. Suprantama, kad tą pačią imtį galima pavaizduoti kitaip, pasirenkant kitą intervalų skaičių arba ilgį.

Statistikoje santykinių dažnių histogramos vartojamos dažniau nei absoliučių dažnių. Skirtingo duomenų skaičiaus santykinių dažnių histogramas lengviau tarpusavy palyginti. Histogramos rodo, kokiomis proporcijomis duomenys pasiskirstė pasirinktuose intervaluose. Jei horizontalioje histogramos ašyje pasirinksime tokį mastelį, kad kiekvieno intervalo ilgis būtų lygus vienetui, tai santykinių dažnių histogramos stačiakampių plotų suma taip pat bus lygi vienetui.

Stebėjimo duomenis galima skirstyti pagal jų įgyjamas reikšmes. Pavyzdžiui, masė, ūgis, detalės skersmuo gali būti bet kuris realusis atitinkamo intervalo skaičius. Kiti duomenys gali būti tik sveikieji neneigiamieji skaičiai, pavyzdžiui: grūdų skaičius varpoje, žirnių skaičius ankštyje, per valandą gatve pravažiavusių automobilių skaičius ir pan. Pirmojo tipo duomenis skirstydami į intervalus (apvalindami) paverčiame juos antrojo tipo duomenimis. Statistikoje tai vadinama **duomenų grupavimu**. 3.2 pavyzdyje jaunuolių ūgį suskirstėme į 10 grupių (intervalų). Statistiniam tyrimui dažnai pateikiami jau sugrupuoti duomenys. ■

3.3 pavyzdys. Lentelėje pateikti 40 vyrų kepurių dydžiai.

3.2 lentelė

Kepurės dydis (grupė)	Dažnis (n_i)	Santykinis dažnis (f_i)
53	1	0,025
54	2	0,05
55	4	0,1
56	6	0,15
57	10	0,25
58	7	0,275
59	6	0,15
60	3	0,075
61	0	0
62	1	0,025
Iš viso:	$\sum n_i = 40$	$\sum f_i = 1$

Duomenų skirstyti į intervalus jau nereikia. Nubrėžkite šios imties histogramą.

Kaip tokie statistiniai tyrimai taikomi praktikoje? Sakysime, fabrikas ruošiasi siūti 1000 kepurių. Remiantis 3.2 lentelės duomenimis, 59 dydžio kepurių reikėtų siūti 1000 f_i = 1000 · 0,15 = 150. Žinoma, norint gauti tikslesnius rezultatus, imtis turėtų būti kur kas didesnė. ■

3.2. IMTIES SKAITINĖS CHARAKTERISTIKOS

Histograma – tai kokybinis imties vaizdas. Imties savybėms apibūdinti vartojamos įvairios skaitinės imties charakteristikos, t.y. kuri nors imties savybė nusakoma vienu skaičiumi.

Šiame skyrelyje apibrėšime keletą imties skaitinių charakteristikų. Vienos jų apibūdina tašką, apie kurį išsibarsčiusios imties reikšmės, o kitos – to išsibarstymo dydį. Pirmiausia imtį sutvarkysime ir sugrupuosime. Tai dažnai palengvina skaitinių charakteristikų skaičiavimą.

Prisiminkime 3.1 pavyzdžio imtį (n = 10):

2, 6, 4, 6, 5, 2, 1, 2, 3, 1.

Išdėstykime šiuos duomenis didėjimo tvarka:

1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6.

Didėjimo tvarka išrikiuota imtis vadinama **sutvarkyta imtimi**.

Kitas su imtimi atliekamas veiksmas – **imties grupavimas**. Paprastai imtis grupuojama prieš brėžiant histogramą. Ši imtis sugrupuota atrodys taip:

y_i	1	2	3	4	5	6
n_i	2	3	1	1	1	2

$$n = n_1 + n_2 + ... + n_6 = 2 + 3 + 1 + 1 + 1 + 2 = 10 \ .$$

Viršutinėje eilutėje nurodytos imties įgyjamos reikšmės (arba grupavimo intervalai, arba grupavimo intervalų centrai), o apatinėje – imties reikšmės pasikartojimų skaičius (arba į intervalą patekusių duomenų skaičius).

Sugrupuoti duomenys dažnai pateikiami ir vertikaliose lentelėse (3.3 pavyzdys).

IMTIES PLOTIS

3.1 apibrėžimas

Imties **pločiu** vadinamas didžiausios ir mažiausios imties reikšmių skirtumas.

Imties plotis žymimas raide r. Tai vienas iš imties išsibarstymo dydžio matų.

Pavyzdžiai. 3.1 pavyzdžio imties plotis

$$r = 6 - 1 = 5.$$

Rasime tokios sutvarkytos imties plotį:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 19, \quad x_3 = 20, \quad x_4 = 25, \quad x_5 = 30.$$

Remiantis 3.1 apibrėžimu, šios imties plotis

$$r = x_5 - x_1 = 30 - 2 = 28. \quad ■$$

IMTIES CENTRAS

3.2 apibrėžimas

Imties **centru** vadinamas didžiausios ir mažiausios imties reikšmių aritmetinis vidurkis.

Imties centras – taško, apie kurį išsibarsčiusios imties reikšmės, skaitinė charakteristika. Jis žymimas raide c.

Pavyzdžiai. 3.1 pavyzdžio imties centras

$$c = \frac{6+1}{2} = 3{,}5 \ .$$

Imties

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 19, \quad x_3 = 20, \quad x_4 = 25, \quad x_5 = 30$$

centras

$$c = \frac{x_5 + x_1}{2} = \frac{30+2}{2} = 16. \quad ■$$

Pagrindinės ir dažniausiai vartojamos imties skaitinės charakteristikos – **imties vidurkis** ir **dispersija**.

IMTIES VIDURKIS

3.3 apibrėžimas

Imties $x_1, x_2, ..., x_n$ **vidurkiu** vadinamas aritmetinis vidurkis

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (3.1)$$

Norint pabrėžti imties vidurkio priklausomybę nuo n, vartojamas žymėjimas $\overline{x}_n$.

Sugrupuotos imties vidurkis skaičiuojamas pagal formulę:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(y_1 n_1 + y_2 n_2 + ... + y_k n_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} y_i n_i; \qquad (3.2)$$

čia k – grupių skaičius.

Pavyzdys. Apskaičiuosime 3.1 pavyzdžio imties vidurkį:

$$\overline{x} = \frac{1}{10}(2+6+4+6+5+2+1+2+3+1) = 3{,}2. \quad ■$$

Taikant sugrupuotos imties vidurkio (3.2) formulę, tos pačios imties vidurkis skaičiuojamas taip:

$$\overline{x} = \frac{1}{10}(1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 5\cdot 1 + 6\cdot 2) = 3{,}2 \ .$$

(3.2) formulė ypač patogi tada, kai duomenų skaičius daug didesnis už grupių skaičių.

Anksčiau apskaičiavome atsitiktinio dydžio X, reiškiančio atsivertusių akučių skaičių, vidurkį $\mathbf{E}X = 3{,}5$. Šis vidurkis statistikoje vadinamas teoriniu. Tai pastovus skaičius. Imties vidurkis, pakartojus tą patį bandymą, gali būti jau kitas, t.y. imties vidurkis yra atsitiktinis dydis. Be to, kiekvieną kauliuką galime mesti ne 10, o 100 ar 1000 kartų. Tikimybių teorijoje įrodoma: jei kauliukas taisyklingas, tai, didinant bandymų skaičių n, imties vidurkis $\overline{x}$ artėja prie vidurkio $\mathbf{E}X$. Tokios teoremos vadinamos didžiųjų skaičių dėsniu.

Pavyzdys. Skaitinių charakteristikų palyginimas. Sakykime, kad duota sutvarkyta imtis: 1, 20, 22, 23, 26. Šios imties centras

$$c = \frac{26+1}{2} = 13,5,$$

o vidurkis

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(1+20+22+23+26) = 18,4.$$

Matome, kad šiuo atveju imties vidurkis geriau apibūdina tašką, apie kurį išsibarsčiusios imties reikšmės, nei imties centras. ■

Jau žinome ir kitą atsitiktinio dydžio X skaitinę charakteristiką – atsitiktinio dydžio dispersiją $\mathbf{D}X$. Tai atsitiktinio dydžio reikšmių išsibarstymo matas. Atitinkamas imties išsibarstymo matas yra imties dispersija. Imties dispersija nusako stebėjimo duomenų išsibarstymo dydį apie konkretų tašką – imties vidurkį.

IMTIES DISPERSIJA

3.4 apibrėžimas

Imties x_1, x_2, ..., x_n **dispersija** vadinama duomenų skirtumų nuo imties vidurkio kvadratų suma, padalyta iš n–1. Imties dispersija žymima s^2 ir apskaičiuojama pagal formulę:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \quad (3.3)$$

Sugrupuotiems duomenims taikome formulę:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}((y_1 - \bar{x})^2 n_1 + (y_2 - \bar{x})^2 n_2 + ... + (y_k - \bar{x})^2 n_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(y_i - \bar{x})^2 n_i. (3.\ 4)$$

P a s t a b a. Kartais (3.3) ir (3.4) formulėse vietoj n–1 imamas n. Dalijant iš n–1, tiksliau įvertinama teorinė (tikroji) stebimo atsitiktinio dydžio dispersija.

Pavyzdys. Apskaičiuosime 3.1 pavyzdžio imties dispersiją. Remiantis (3.3) formule,

$$s^2 = \frac{1}{9}((2-3{,}5)^2 + (6-3{,}5)^2 + (4-3{,}5)^2 + (6-3{,}5)^2 + (5-3{,}5)^2 +$$
$$+ (2-3{,}5)^2 + (1-3{,}5)^2 + (2-3{,}5)^2 + (3-3{,}5)^2 + (1-3{,}5)^2) = 56/15 \approx 3{,}733.$$

Taikydami sugrupuotų duomenų (3.4) formulę, skaičiuojame taip:

$$s^2 = \frac{1}{9}\cdot((1-3{,}5)^2\cdot 2 + (2-3{,}5)^2\cdot 3 + (3-3{,}5)^2 + (4-3{,}5)^2 +$$
$$+ (5-3{,}5)^2 + (6-3{,}5)^2\cdot 2) = 56/15 \approx 3{,}733\ .$$

Atsitiktinio dydžio, reiškiančio kauliuko atsivertusių akučių skaičių, dispersija lygi 35/12 ≈ 2,9167. ■

3.5 apibrėžimas

Imties $x_1, x_2, ..., x_n$ **vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu,** arba tiesiog kvadratiniu nuokrypiu, vadinama kvadratinė šaknis iš imties dispersijos. Jis žymimas raide s.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

Pavyzdys. 3.1 pavyzdžio imties vidutinis kvadratinis nuokrypis $s = \sqrt{56/15} \approx 1,93$. ■

Imties dispersijos skaičiavimą palengvina formulė:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2. \quad (3.5)$$

Dešiniąją (3.5) lygybės pusę lengviau apskaičiuoti ir skaičiuokliu.

UŽDAVINIAI

1. Duota imtis: 5, 2, 1, 1, 3. Apskaičiuokite imties plotį r, centrą c, vidurkį $\overline{x}$, dispersiją s^2 ir kvadratinį nuokrypį s.

2. Duota imtis: 0, 1, 1, 3, 1, 2, 2, 1. Apskaičiuokite imties skaitines charakteristikas r, c, $\overline{x}$, s^2 ir s.

3. Šeši mokiniai skaičiavo raidžių A ir $Ž$ dažnius įvairiuose tekstuose.
a) A raidės dažniai:
0,0978; 0,0777; 0,087; 0,1175; 0,0808; 0,0923.
b) $Ž$ raidės dažniai:
0,0076; 0,0065; 0,0073; 0,0103; 0,0064; 0,00601.
Apskaičiuokite abiejų imčių skaitines charakteristikas: r, c, $\overline{x}$, s^2 ir s. Naudokitės skaičiuokliu ir (3.5) formule.

4. Duota imtis: 1 , 3 , 100 , 102 , 105 , 109 . Apskaičiuokite imties centrą ir vidurkį. Kuri charakteristika šiai imčiai yra tinkamesnė?

5. Meskite lošimo kauliuką 10 kartų ir pasižymėkite atsivertusių akučių skaičius. Apskaičiuokite imties vidurkį $\overline{x} = y_1$. Kartokite bandymą dar 19 kartų. Gausite naują vidurkių imtį $y_1, y_2, ..., y_{20}$. Nubrėžkite šios imties histogramą.

6. Mokiniai A ir B pro mikroskopą stebėjo tą pačią bakterijų koloniją. Abu skaičiavo bakterijas po 4 kartus. Stebėjimo duomenys surašyti lentelėje:

Stebėtojas	Bakterijų skaičius			
A	49	52	51	48
B	47	56	44	53

Apskaičiuokite abiejų imčių skaitines charakteristikas $\overline{x}$, s^2, s. Kuris mokinys geriau skaičiavo?

7. Įrodykite (3.5) formulę.

8. Apskaičiuokite 3.2 pavyzdžio (p. 69) imties vidurkį $\overline{x}$, dispersiją s^2 ir kvadratinį nuokrypį s.

9. Farmacininkai tyrė, per kiek minučių ištirpsta piliulė. Jie gavo imtį:

15	18	19	21	23	26	17	18	24	20	13	10	16	11	9
12	14	10	19	13	20	15	11	18	15	21	12	19	18	22

Nubrėžkite histogramą ir apskaičiuokite imties skaitines charakteristikas $\overline{x}$, s^2 ir s.

10. Draudimo kompanija surinko duomenis apie apdraudžiamų automobilių kainą (tūkst. dolerių):

2,0	3,0	2,4	1,7	2,4	2,7	3,4	9,9	6,4	1,0
1,5	1,3	2,1	4,4	5,8	5,6	3,3	2,0	1,0	1,5
3,5	3,4	1,7	2,5	0,5	1,6	1,4	5,0	2,2	3,1
1,6	2,2	1,1	1,4	1,8	1,4				

Nubrėžkite histogramą ir apskaičiuokite imties skaitines charakteristikas $\overline{x}$, s^2 ir s.

11. Nubrėžkite 3.3 pavyzdžio (p. 72) imties histogramą. Apskaičiuokite imties vidurkį $\overline{x}$ ir dispersiją s^2 .

12. Tiriant medienos išteklius, buvo skaičiuojami medžiai, kurių kamieno skersmuo didesnis nei 30 cm. Suskaičiuoti penkiasdešimties atsitiktinai parinktų 1 ha ploto miško sklypų medžiai:

4	5	4	6	2	4	3	5	3	2
5	6	5	4	1	5	0	5	3	5
1	4	2	4	3	6	5	4	4	4
4	3	4	3	6	5	7	8	7	6
6	5	9	2	8	7	4	4	5	6

Nubrėžkite histogramą. Apskaičiuokite imties vidurkį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

3.3. DAŽNIS IR TIKIMYBĖ

Sprendžiant sudėtingus gamtos mokslų ir technikos uždavinius, ne visada pavyksta rasti įvykio tikimybę naudojantis tikimybės apibrėžimu. Pavyzdžiui, kaip apskaičiuoti tikimybę, kad atsivers nesimetriškos monetos herbas arba per tam tikrą laiką skils radiaktyvus atomas?

3.6 apibrėžimas

Sakykime, kad n bandymų serijoje įvykis A įvyko ν kartų. Įvykio A **statistiniu dažniu**, arba tiesiog dažniu, vadiname santykį ν/n.

Atsitiktinio įvykio tikimybė apskaičiuojama neatliekant bandymo arba laikoma iš anksto duota. Dažnį galima apskaičiuoti tik remiantis atlikto bandymo duomenimis. Stebimo atsitiktinio įvykio pasikartojimų skaičius ir dažnis yra **atsitiktiniai dydžiai.**

Meskime monetą 10 kartų. Suskaičiuokime, kiek kartų atsivertė herbas (įvykis A). Jei tai įvyko 6 kartus, tai įvykio A dažnis lygus 0,6. Herbas galėjo atsiversti ir 2 kartus. Tada dažnis lygus 0,2. Tais atvejais, kai žinoma teorinė įvykio A tikimybė (monetos ar kauliuko metimas), galima teorinę tikimybę palyginti su to paties įvykio statistiniu dažniu. Jau seniai pastebėta, kad, didinant bandymų skaičių, statistinis įvykio dažnis artėja prie to įvykio tikimybės. Ši dažnio savybė neretai vartojama ir nežinomai įvykio tikimybei apibrėžti: skaičius, prie kurio artėja įvykio dažnis didinant bandymų skaičių, vadinamas įvykio tikimybe, arba statistine tikimybe.

Pavyzdys. Matematikas Dž. Kerichas (*J. E. Kerich*) Antrojo pasaulinio karo metu buvo internuotas. Turėdamas laiko, jis eksperimentavo mėtydamas monetą. Per 10 serijų po 1000 metimų herbas atsivertė atitinkamai 502, 511, 497, 529, 504, 476, 507, 528, 504, 529 kartus. Matome, kad gauti skaičiai yra artimi 500, nors nė vienas jų nelygus 500. Tą patį bandymą atliko prancūzų gamtininkas ir rašytojas G.de Biufonas (*George Lonuies de Buffon,* 1707–1788) bei anglų matematikas ir statistikas K. Pirsonas (*Karl Pearson,* 1857–1936). Pateiksime kai kuriuos rezultatus:

Bandytojas	Bandymų skaičius	Kiek kartų atsivertė herbas	Dažnis
Biufonas	4040	2048	0,5069
Kerichas	10000	5087	0,5087
Pirsonas	12000	6019	0,5016
Pirsonas	24000	12012	0,5005

Dabartinėmis sąlygomis panašius bandymus galima atlikti pasitelkus kompiuterį ar skaičiuoklį, galintį generuoti atsitiktinius skaičius. ■

UŽDAVINIAI

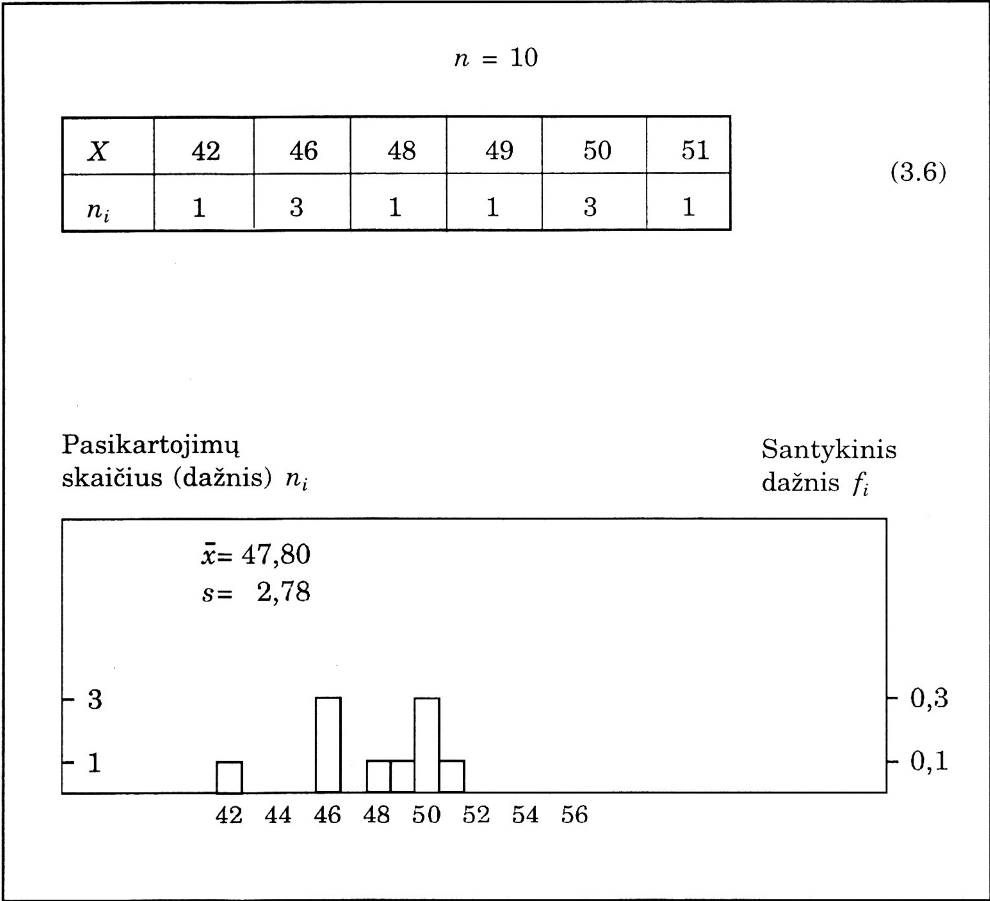
13. Meskite monetą 10, 50 ir 100 kartų. Apskaičiuokite herbo atsivertimo dažnį. Palyginkite gautą rezultatą su klasės draugų rezultatais. Apskaičiuokite visų bandymų bendrą dažnį. Tą patį bandymą atlikite su lošimo kauliuku, apskaičiuokite 6 akučių atsivertimo dažnį.

14. Apskaičiuokite raidžių *a, b, i, ž* dažnį 10–yje literatūrinio teksto puslapių. Kad būtų papraščiau, skaičiuokite tik pilnų eilučių raides. Palyginkite savo rezultatą su klasės draugų gautais rezultatais. Apskaičiuokite kiekvienos raidės bendrą dažnį.

3.4. NORMALUSIS SKIRSTINYS

Šiame skyrelyje supažindinsime su dažniausiai pasitaikančiu stebėjimo duomenų pasiskirstymu.

Pateiksime elektroniniu skaičiuokliu atlikto bandymo rezultatus. Modeliuojamas toks bandymas. Moneta metama 100 kartų ir stebima, kiek kartų atsivers herbas. Tai atsitiktinis dydis X, galintis įgyti sveikąsias reikšmes nuo 0 iki 100. Bandymas modeliuojamas naudojantis atsitiktiniais skaičiais, tolygiai pasiskirsčiusiais intervale $[0; 1]$, t.y. skaičiuoklis pateikia atsitiktinius skaičius tarp 0 ir 1 ir tokius, kad tikimybė gauti skaičių iš intervalo $[a; b] \subset [0; 1]$ lygi $b - a$. Atliekant šį bandymą laikoma, kad atsivertė herbas, jei skaičiuoklis „pasirinko“ atsitiktinį intervalo $[1/2; 1]$ skaičių. Bandymas – monetos metimas 100 kartų – kartojamas n = 10, 100, 500, 1000 ir 10 000 kartų. Stebimo atsitiktinio dydžio X reikšmės pasikartojimų skaičius žymimas n_i.



$n = 10$

X	42	46	48	49	50	51
n_i	1	3	1	1	3	1

(3.6)

3.2 pav.

Apskaičiuojamas (3.6) imties vidurkis ir dispersija. Taikomos sugrupuotos imties (3.2) ir (3.4) formulės:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\,(1 \cdot 42 + 3 \cdot 46 + 1 \cdot 48 + 1 \cdot 49 + 3 \cdot 50 + 1 \cdot 51) = 47{,}8,$$

$$s^2 = \frac{1}{9}\,((42 - 47{,}8)^2 + 3(46 - 47{,}8)^2 + (48 - 47{,}8)^2 + (49 - 47{,}8)^2 +$$

$$+ 3(50 - 47{,}8)^2 + (51 - 47{,}8)^2) = 7{,}73\,,$$

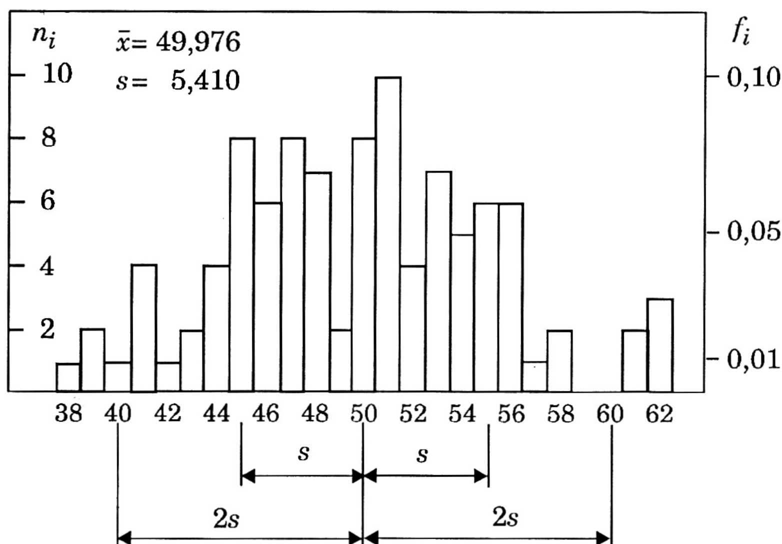
$$s = 2{,}78\,.$$

Histogramoje (3.2 pav.) duomenys negrupuoti, todėl vietoje patekusių į intervalą duomenų skaičiaus atidedamas atsitiktinio dydžio reikšmės pasikartojimų skaičius arba santykinis dažnis.

$n = 100$

X	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
n_i	1	2	1	4	1	2	4	8	6	8	7	2

X	50	51	52	53	54	55	56	57	58	61	62
n_i	8	10	4	7	5	6	6	1	2	2	3



3.3 pav.

$n = 500$

n_i $\bar{x} = 49{,}92$ $s = 4{,}83$ f_i

3.4 pav.

$n = 1000$

n_i $\bar{x} = 49{,}87$ $s = 4{,}91$ f_i

3.5 pav.

n = 10 000

n_i $\bar{x}$ = 49,950 s = 4,997 f_i

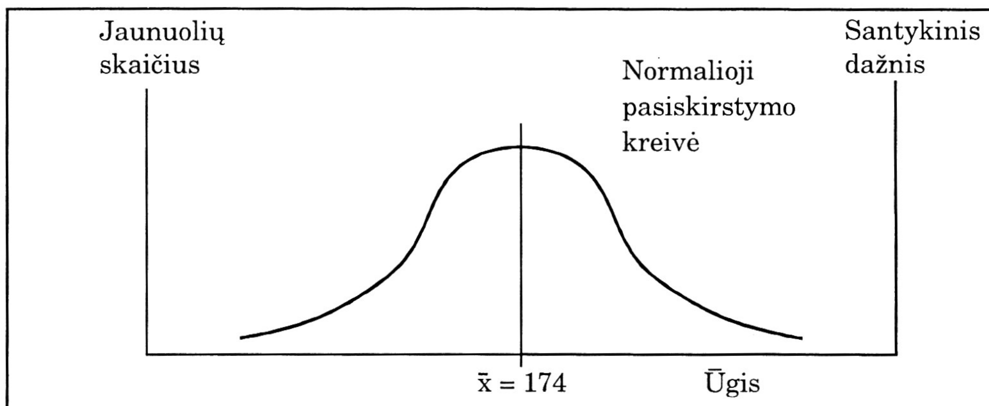
600 400 200 0,06 0,04 0,02

32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66

2s 3s

3.6 pav.

Jei vertikaliojoje ašyje žymimas santykinis dažnis, tai stulpelių bendras plotas lygus 1. Įdomu palyginti, kad stebėto atsitiktinio dydžio matematinė viltis $\mathbf{E}X = 50$, o dispersija $\sigma^2 = \mathbf{D}X = 25$. Taigi, kai bandymų skaičius n didelis, $s^2 \approx \mathbf{D}X$ arba $s \approx \sigma = 5$. Didinant bandymų skaičių, histograma tampa panaši į varpo pavidalo kreivę (žr. 3.3 – 3.6 pav.). Ta kreivė vadinama **dažnio pasiskirstymo kreive** arba **atsitiktinio dydžio pasiskirstymo kreive**. Histograma virsta kreive, kai atsitiktinis dydis (ūgis, masė, gaminamos detalės skersmuo) gali įgyti bet kurią nagrinėjamo intervalo reikšmę.



3.7 pav.

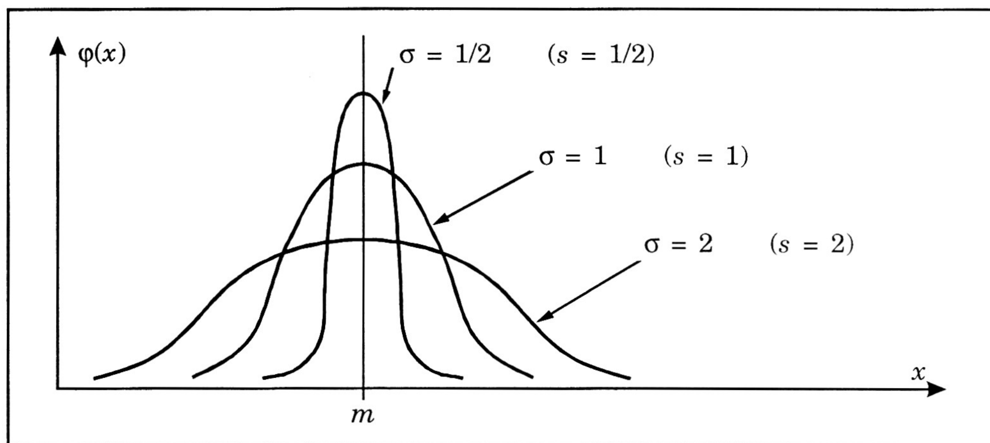
Dažniausiai praktikoje pasitaikanti atsitiktinio dydžio pasiskirstymo kreivė ir yra varpo pavidalo. Ta kreivė vadinama **normaliąja pasiskirstymo kreive**, o tokią pasiskirstymo kreivę turintis atsitiktinis dydis – normaliuoju (3.7 pav).

Pavyzdžiai. Normalusis skirstinys arba artimas normaliajam būdingas:
a) to paties amžiaus ir lyties žmonių ūgiui, masei, krūtinės apimčiai;
b) javų daigų skaičiui kvadratiniame metre, žirnių skaičiui ankštyje;
c) gaminamų detalių labai tiksliai išmatuotam skersmens dydžiui. ■

Pirmieji normaliąją kreivę tyrė anglų matematikas A. Muavras (*A. de Moivre,* 1667–1754) ir žymus vokiečių matematikas K. Gausas (*C. F. Gauss,* 1777–1855). Jie jau žinojo, kad normaliosios pasiskirstymo kreivės lygtis yra

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0.$$

Matome, kad normalioji kreivė visiškai nusakoma dviem parametrais: simetrijos centro koordinate m (vidurkiu $\overline{x}$) ir horizontaliosios ašies mastelio parametru σ (kvadratiniu nuokrypiu s).

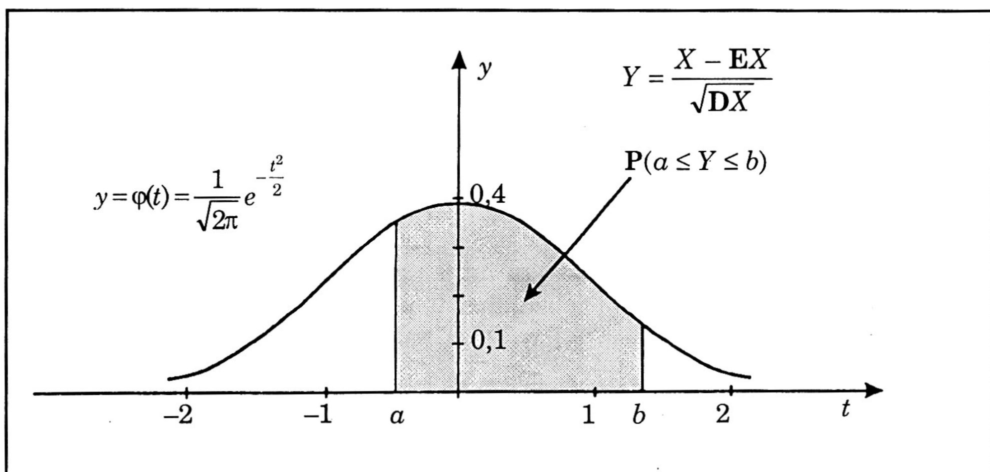


3.8 pav.

Kuo didesnis stebėjimo duomenų išsibarstymas, tuo plokštesnė dažnio pasiskirstymo kreivė (žr. 3.8 pav.). Normaliosios kreivės ribojamas plotas visada lygus vienetui.

Vienas pagrindinių statistikos uždavinių – rasti tikimybę, kad mus dominantis atsitiktinis dydis pateks į kurį nors intervalą. Praktikoje tai atitiktų uždavinį: nustatyti, kurios dalies vyrų ūgis yra intervale [170; 180]. Žinant, kad stebimas dydis turi normalųjį skirstinį, tokias tikimybes galima rasti statistinėse lentelėse. Histogramos vaizdas parodo, ar tiriamasis skirstinys panašus į normalųjį, ar ne.

Normalioji kreivė paprastai standartizuojama: pakeitus kintamąjį x, nagrinėjama kreivė, kurios parametras $m = 0$ ir $\sigma = 1$.



3.9 pav.

Ašis y brėžiama taip, kad taškas $t = 0$ sutaptų su normaliojo atsitiktinio dydžio vidurkiu $\mathbf{E}X = m$ arba imties vidurkiu $\bar{x}$, o t ašyje atidedamas kvadratinių nuokrypių skaičius $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}X}$ arba imties kvadratinis nuokrypis s, t.y. kintamasis x keičiamas kintamuoju $t = \frac{x - \bar{x}}{s}$ arba, jei žinome teorinius parametrus, $t = \frac{x - \mathbf{E}X}{\sigma}$.

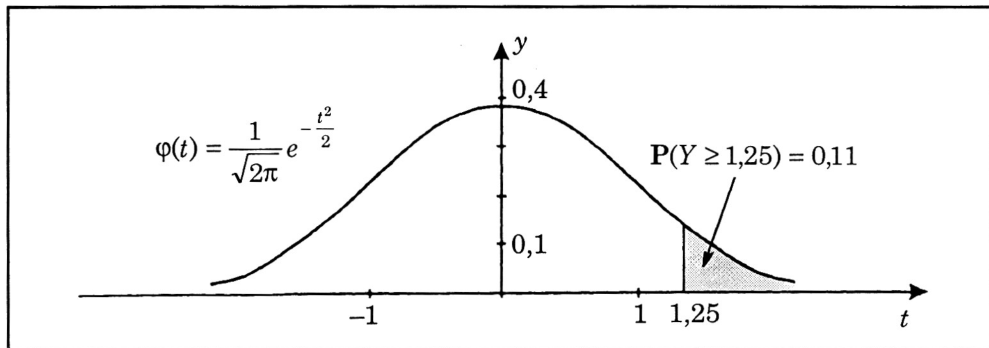
3.9 paveiksle subrūkšniuotas plotas lygus tikimybei, su kuria normaliojo atsitiktinio dydžio $Y = \frac{X - m}{\sigma}$ reikšmės pateks į intervalą $[a; b]$.

Kadangi normalioji kreivė tiesės $t = 0$ atžvilgiu yra simetriška, tai lentelėje pakanka nurodyti kreivės ribojamų dalių plotus, kai $t \ge 0$.

3.3 lentelė

t – kvadratinių nuokrypių nuo vidurkio skaičius	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25
p – tikimybė, kad a.d.reikšmė viršys vidurkį daugiau nei t	0,5	0,4	0,3	0,23	0,16	0,11

t	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5	2,75	3,0
p	0,07	0,04	0,02	0,01	0,006	0,003	0,001



3.10 pav.

3.10 paveiksle subrūkšniuotas plotas randamas 3.3 lentelėje, kai $t = 1{,}25$. Jis lygus 0,11.

Remiantis 3.3 lentele, randamos šios normaliojo atsitiktinio dydžio tikimybės.

1. Tikimybė, kad $X - \bar{x} \le \sigma$, lygi 0,84.
   Tikimybė, kad $|X - \bar{x}| \le \sigma$, lygi 0,68.
2. Tikimybė, kad $|X - \bar{x}| \le 2\sigma$, lygi 0,96.
   Tikimybė, kad $|X - \bar{x}| \le 3\sigma$, lygi 0,99.

Kitaip tariant, jei surinkti duomenys yra normaliojo atsitiktinio dydžio X reikšmės, gautos iš nepriklausomų bandymų, tai 96% duomenų nenukrypsta nuo vidurkio daugiau nei per 2σ (= $2s$) (2 kvadratinius nuokrypius), o 99% duomenų nenukrypsta daugiau nei per $3\sigma(= 3s)$. Didesnė normaliosios kreivės plotų lentelė pateikta knygos pabaigoje.

3.4 pavyzdys. Remdamiesi 3.2 pavyzdžio (p. 69) duomenimis, apskaičiuosime tikimybę, kad atsitiktinai pasirinkto jaunuolio ūgis bus intervale [170; 180]. Randame vidurkį $\bar{x} = 174{,}7$ ir kvadratinį nuokrypį $s = 9{,}2$. Apskaičiuojame standartinio normaliojo dydžio reikšmes, atitinkančias reikšmes 170 ir 180:

$$y_1 = \frac{170 - 174{,}7}{9{,}2} \approx -0{,}51,$$

$$y_2 = \frac{180 - 174{,}7}{9{,}2} \approx 0{,}58.$$

Todėl

$$\mathbf{P}(170 \le X \le 180) = \mathbf{P}(-0{,}51 \le Y \le 0{,}58) =$$
$$= \mathbf{P}(-0{,}51 \le Y \le 0) + \mathbf{P}(0 \le Y \le 0{,}58) =$$
$$= \mathbf{P}(0 \le Y \le 0{,}51) + \mathbf{P}(0 \le Y \le 0{,}58) \approx 0{,}19 + 0{,}22 = 0{,}41. \quad (3.7)$$

(3.7) tikimybes randame normaliosios kreivės plotų lentelėje (žr. p. 91). Taigi, remdamiesi 3.2 pavyzdžio duomenimis, galime teigti, kad 41% jaunuolių ūgis yra intervale [170; 180]. Sprendžiant realius šio tipo uždavinius, imtis turėtų būti didesnė. ■

15. Normalųjį atsitiktinį dydį, reiškiantį jaunuolio ūgį, pažymėkite X. Remdamiesi 3.2 pavyzdžio duomenimis, apskaičiuokite tikimybes, kad:

a) $X \geq 170$;
b) $160 \leq X \leq 170$;
c) $X \leq 180$.

16. Remdamiesi 9 uždavinio (žr. p. 77) duomenimis, apskaičiuokite tikimybes, kad piliulės tirpimo laikas X yra:

a) $X \geq 17$;
b) $17 \leq X \leq 20$;
c) $X \geq 20$.

Laikykite, kad atsitiktinio dydžio X skirstinys yra normalusis.

17. Raskite standartinės normaliosios kreivės ribojamą plotą į dešinę nuo taško:

a) 1,5; b) –1,5; c) 0,8; d) 0,2; e) 4.

18. Raskite standartinės normaliosios kreivės ribojamą plotą į kairę nuo taško:

a) 0; b) 1,2; c) –3; d) 3; e) –0,5.

19. Raskite standartinės normaliosios kreivės ribojamą plotą tarp taškų:

a) 1,2 ir 1,9; b) –1,25 ir 1,25; c) –1 ir 2.

20. Normaliojo skirstinio vidurkis lygus 100, o kvadratinis nuokrypis – 20. Raskite šios normaliosios kreivės ribojamą plotą:

a) į kairę nuo 75;
b) į dešinę nuo 200;
c) tarp 50 ir 150.

Raskite skaičių x tokį, kad plotas į dešinę nuo x būtų 0,05.

3.5. STATISTINĖS HIPOTEZĖS SĄVOKA

Tarkime, kad, metant monetą, 5 kartus iš eilės atsivertė ta pati jos pusė. Šiuo atveju galima suabejoti monetos simetriškumu ir vienalytiškumu. Arba, metant lošimo kauliuką, šešios akutės atsivertė 10 kartų iš 12. Ir vėl galima įtarti, kad ne visų sienų atsivertimo tikimybės yra vienodos. Tai, kad, esant įprastoms prielaidoms, įvyko įvykis, kurio tikimybė maža, verčia tomis prielaidomis (monetos ar kauliuko simetriškumu) suabejoti. Tikrinamoji prielaida (ar prielaidos) vadinama **nuline hipoteze** ir žymima H_0. Pavyzdžiui,

H_0 – tikimybė, kad, metant monetą, atsivers herbas yra lygi tikimybei, kad atsivers skaičius.

Tikimybė, kad 5 kartus atsivers herbas, lygi $(1/2)^5 \approx 0{,}031$. Tikimybė, kad 5 kartus atsivers ta pati monetos pusė, lygi $(1/2)^5 + (1/2)^5 \approx 0{,}062$.

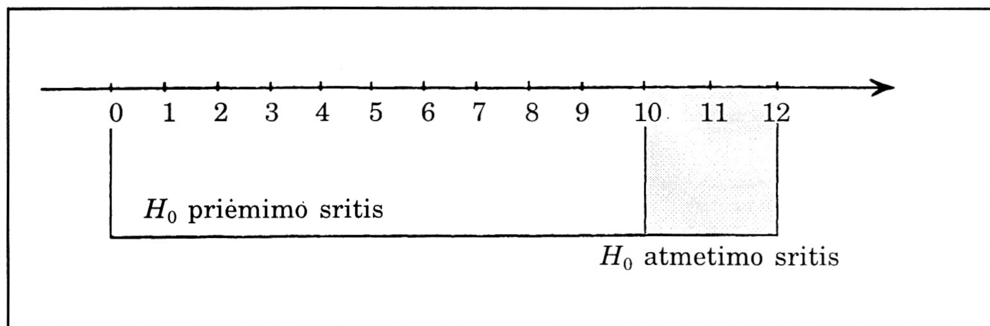
Jei hipotezę H_0 tikrinančio įvykio tikimybė maža, tai tą hipotezę atmetame. Ar tikimybės 0,031 arba 0,062 yra mažos? Vartojamos kelios stan-

dartinės hipotezę tikrinančio įvykio tikimybės: 0,05; 0,01; 0,001. Šios tikimybės vadinamos hipotezės reikšmingumo lygmeniu ir pasirenkamos atsižvelgiant į tai, ar dideli bus nuostoliai padarius klaidą.

3.5 pavyzdys. Sakykime, kad tikimybė per žiemą susirgti bent viena iš peršalimo ligų yra 1/2. Bandomi nauji skiepai ir tiriama jų įtaka žmogaus atsparumui peršalimo ligoms. Paskiepyta ir stebima 12 žmonių. Remiantis šių žmonių stebėjimu, reikia patikrinti hipotezę apie skiepų veiksmingumą. Kadangi duomenų apie skiepų veiksmingumą neturime, tai nulinę hipotezę H_0 suformuluosime taip:

H_0 – tikimybė, kad skiepytas žmogus susirgs, yra 1/2, t.y. skiepai neveiksmingi.

Remiantis bandymo duomenimis, sudaroma hipotezę tikrinanti statistika – atsitiktinis dydis. Šiuo atveju pasirinksime nesusirgusių žmonių skaičių X (iš 12). Toliau nagrinėjama tikrinančios statistikos galimų reikšmių aibė, šiuo atveju: 0, 1, 2, ..., 10, 11, 12. Ta reikšmių aibė suskaidoma į dvi dalis: viena jų vadinama **hipotezės atmetimo, arba kritine, sritimi,** kita – **hipotezės priėmimo sritimi, arba tikrinančios statistikos pasikliautinuoju intervalu.**



3.11 pav.

Kritinė sritis randama pasirinkus hipotezės reikšmingumo lygmenį. Pasirinkime 0,05.

Tardami, kad hipotezė H_0 yra teisinga, apskaičiuosime tikimybę, kad iš 12 žmonių daugiau nei 10 nesusirgs peršalimo ligomis:

$$\mathbf{P}(X \geq 10) = \mathbf{P}(X = 10) + \mathbf{P}(X = 11) + \mathbf{P}(X = 12) =$$

$$= C_{12}^{10}\,(1/2)^{12} + C_{12}^{11}\,(1/2)^{12} + (1/2)^{12} \approx 0{,}016 + 0{,}003 + 0 = 0{,}019.$$

Kadangi $\mathbf{P}(X = 9) = 0{,}054 > 0{,}05$, tai į hipotezės H_0 atmetimo sritį pateks šios tikrinančios statistikos reikšmės: 10, 11, 12 (3.11 pav.).

Taigi jei iš 12 skiepytų žmonių bent 10 nesusirgs, hipotezę H_0 (kad skiepai neveiksmingi) atmesime. Jei nesusirgs mažiau nei 10 žmonių, tai hipotezės H_0 atmesti negalėsime. ■

Statistikai, spręsdami realius uždavinius, kai stebėjimo duomenų skaičius yra didelis, naudojasi įvairių skirstinių lentelėmis. Tada pakanka žinoti tik tikrinančios statistikos skirstinį. Binominių tikimybių lentelės iki $n = 12$ pateiktos p. 92. Šiuo atveju turėjome binominį skirstinį. Dažnai tikrinančios statistikos turi normalųjį skirstinį, o rasti be lentelių normaliojo dydžio pasikliautinąsias sritis yra sudėtinga.

UŽDAVINIAI

21. Metant lošimo kauliuką 12 kartų, 6 akutės iškrito 5 kartus. Patikrinkite hipotezę, kad kauliukas yra simetriškas. Reikšmingumo lygmuo 0,05.
N u r o d y m a s: tikrinanti statistika – tos pačios sienos atsivertimų skaičius X.

22. Žmogus gali važiuoti į darbą autobusu arba troleibusu ir važiuoja tuo, kas pirma pasitaiko. Žmogus sako, kad tikimybės važiuoti į darbą autobusu ir troleibusu yra lygios. Per 14 dienų tik 5 dienas į darbą jis važiavo autobusu. Ar jo hipotezė atmestina?

23. Gerai sureguliuoto džemo pilstymo automato įpilamo džemo kiekis normaliai pasiskirstęs su vidurkiu 100 ir kvadratiniu nuokrypiu $\sigma = 5$. Raskite pasikliautinąjį intervalą tikrinti hipotezei, kad automatas gerai sureguliuotas. Reikšmingumo lygmuo 0,05.

ATSAKYMAI

1 SKYRIUS
KOMBINATORIKOS PRADMENYS

1. 72; n; 720; 990. **2.** 24. **3.** 60. **4.** 720. **5.** 48. **6.** 90000. **7.** 720; 480. **8.** 3360. **9.** a) 216; b) 120. **10.** a) 6720; b) 32 768. **11.** 24; 36. **12.** 13 800; 6 375 600. **13.** 56. **14.** 144. **15.** 199. **16.** 1980. **17.** 1200. **18.** 45. **19.** 838. **20.** 1885. **21.** 84; 330; 5005; 13 983 816. **22.** 56. **23.** 560. **25.** 3300. **26.** 20. **27.** 10. **28.** 1140; 171. **29.** 120; 1. **30.** 28 800. **31.** 170; 10. **32.** 10. **33.** 1680. **34.** 70. **35.** 2 903 040. **36.** 101; m^{100}; $100m^{99}n$; $4950m^{98}n^2$. **37.** $C_{50}^{19}x^{19}$; C_{50}^{10}. **39.** 0,94; 1,02. **41.** Jei $r = \frac{3n-1}{4}$ yra sveikasis skaičius, tai yra du lygūs didžiausi nariai: $C_n^r\, 3^r/4^n$ ir $C_n^{r+1}3^{r+1}/4^n$. Kitais atvejais didžiausias narys yra $C_n^{r+1}3^{r+1}/4^n$, kai r yra skaičiaus $\frac{3n-1}{4}$ sveikoji dalis. **43.** 2. **44.** 25. **45.** –6. **46.** 400. **47.** 31. **48.** $1+p+p^2+p^3+p^4+p^5$. **49.** $4a$+11. **50.** 50. **51.** 100. **52.** $6x^2$+55.

2 SKYRIUS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS PRADMENYS

1. 1/6; 1/2; 1/3. **2.** 2/5. **3.** a) 5/11; b) 6/11. **8.** 1/3. **9.** 4/9; 5/9; 4/9; 1/3. **10.** 1/36; 1/18; 1/12; 1/9; 5/36; 1/6; 5/36; 1/9; 1/12; 1/18; 1/36. **11.** a) 1/3; b) 1/3; c) 1/2. **12.** 1/120. **13.** 4/9. **14.** 1/45. **15.** 1/5. **17.** a) 3/5; b) 2/5; c) 48/95; d) $\frac{C_8^3C_{12}^5}{C_{20}^8}$; e) $\frac{C_8^3C_{12}^5+C_8^2C_{12}^6+C_8^1C_{12}^7+C_8^1C_{12}^8}{C_{20}^8}=\frac{5137}{8398}\approx 0{,}6117$.

18. Įvykį: pirmasis ligonis pasirinko i–tąjį, o antrasis — j–tąjį (i, j = 1, 2) gydytoją pažymėkime G_iG_j. Tada: a) $E_1 = G_1G_1$, $E_2 = G_1G_2$, $E_3 = G_2G_1$, $E_4 = G_2G_2$; b) $A = \{G_1G_2, G_2G_1\} = E_2 \cup E_3$; c) $\mathbf{P}(E_1) = \mathbf{P}(E_2) = \mathbf{P}(E_3) = \mathbf{P}(E_4) = 1/4$, $\mathbf{P}(A) = 1/2$. **19.** a) Trijų elementų (A, B, C) kėlinio sudarymas; b) $E_1 = ABC$, $E_2 = ACB$, $E_3 = BAC$, $E_4 = BCA$, $E_5 = CAB$, $E_6 = CBA$; c) 1/3, 1/3. **20.** 2/3; 1/3. **21.** 1/2; 1/3; 1/6. **22.** 1/4; 1/4; 1/2. **23.** $\mathbf{P}(A_1) = 0{,}9$; $\mathbf{P}(A_2) = 0{,}65$; $\mathbf{P}(A_3) = 0{,}45$; $\mathbf{P}(A_4) = 0{,}3$; $\mathbf{P}(A_5) = 0{,}1$; $\mathbf{P}(B) = 0{,}35$; $\mathbf{P}(C) = 0{,}55$; $\mathbf{P}(D) = 0{,}35$. **24.** a) 0,95; b) 0,45; c) 0,25; d) 0,75; e) 0,65. **26.** a) 3/8; b) 5/8; c) 5/8; d) 3/8; e) 3/4; f) 1/4. **27.** $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$; $B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$; $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$; $D = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup A_3$; $F = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$; $G = (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_2 \cap \overline{A}_3)$; $H = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$. **28.** a) B; b) A; c) B; d) C; e) D; taip. **29.** 2^n. **30.** Taip; 1/2. **33.** a) 1/18; b) 4/9; c) 4/9; d) 1/2; e) 1/2. **34.** 13/20. **36.** a) 1/8; b) 3/8; c) 3/8; d) 1/8. **37.** 1/24, 1/3, 1/4, 5/8, 0, 3/8; $E = A \cup B \cup C \cup G$, $E = D \cup G$. **39.** a) 2/5; b) 3/5;

c) 1/5. **40.** (k–1)/66. **41.** a) 1/8; b) 7/8; taip. **43.** 1/6. **44.** 3. **46.** 0,96059601. **47.** $p \geq 0{,}9^{0{,}2} \approx 0{,}9791$. **48.** a) 0,985; b) 0,14; c) 0,425. **49.** a) 1/2; b) 1; c) 1/2; d) 1/6; e) 1/6; f) 1/8. **50.** $\mathbf{P}(A \mid B) = 1$, nes $A \cap B = B$. **51.** 7/9. **52.** a) 0,1; b) 0,5; c) 1/3; d) 0,5; e) 0,25; f) 0,75; g)1/7; h) 2/3; i) 6/7. **53.** 1/2. **54.** a) 1/2; b) 1/2. **55.** 0,25. **56.** 36/115; 19/115; 60/115.

57.

X	10	–10
P	1/2	1/2

$\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}X = 100$.

58.

X	–10	20
P	2/3	1/3

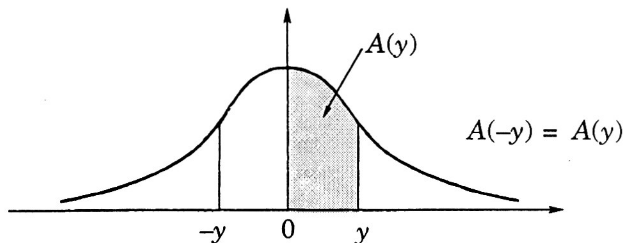
$\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}X = 200$.

59. $\mathbf{E}X = 8/3$; $\mathbf{D}X = 38/9$; $\mathbf{E}Y = 1/2$; $\mathbf{D}Y = 31/12$; $\mathbf{E}Z = 0$; $\mathbf{D}Z = 17/3$. **60.** 35/12. **61.** $\mathbf{E}X = 13/8$; $\mathbf{D}X = 47/64$; $\mathbf{E}Y = 1{,}4$; $\mathbf{D}Y = 0{,}64$. **64.** a) 96/625; b) 624/625. **65.** a) 1, 1/4; b) 1/2. **66.** $19/12^{12}$. **67.** a) $2(4/5)^9 \approx 0{,}268$; b) $(1/5)^{10} = 1{,}024 \cdot 10^{-7}$. **68.** 0,2. **69.** a) 8/27; b) 8/81; c) 11/27, 1/9. **70.** a) 4 iš 5; b) bent 4 iš 5. **71.** a)–d) įvykiai nėra nepriklausomi.

3 SKYRIUS
TIKIMYBIŲ TEORIJOS PRADMENYS

1. 4; 3; 2,4; 2,8; 1,673.. **2.** 3; 1,5; 1,375; 0,839; 0,916. **3.** a) 0,0398; 0,0976; 0,9218; 0,0002; 0,0144; b) 0,00429; 0,008155; 0,00735; $2{,}438 \cdot 10^{-6}$; 0,00156. **4.** 55; 70; vidurkis. **6.** A: $\bar{x} = 50$; $s^2 = 3{,}33$; B: $\bar{x} = 50$; $s^2 = 30$. Geriau skaičiavo A, nes jo rezultatai mažiau išsibarstę. **8.** 174,7; 83,96; 9,163. **9.** 16,63; 20,38; 4,51. **10.** 2,717; 3,552; 1,885. **11.** 57,225; 3,512. **12.** 4,46; 3,437. **15.** a) 0,695; b) 0,41; c) 0,281. **16.** a) 0,467; b) 0,24; c) 0,228. **17.** a) 0,067; b) 0,933; c) 0,212; d) 0,421; e) 0. **18.** a) 0,5; b) 0,885; c) 0,001; d) 0,999; e) 0,308. **19.** a) 0,086; b) 0,788; c) 0,818. **20.** a) 0,106; b) 0; c) 0,988; 132,8. **21.** Ne. **22.** Ne, hipotezei atmesti nėra pagrindo. **23.** [90,2; 109,8].

NORMALIOSIOS KREIVĖS PLOTAI



y	$A(y)$	y	$A(y)$	y	$A(y)$
0,00	0,000	0,54	0,205	1,25	0,394
0,02	0,008	0,56	0,212	1,30	0,403
0,04	0,016	0,58	0,219	1,35	0,411
0,06	0,024	0,60	0,226	1,40	0,419
0,08	0,032	0,62	0,232	1,45	0,426
0,10	0,040	0,64	0,239	1,50	0,433
0,12	0,048	0,66	0,245	1,55	0,439
0,14	0,056	0,68	0,252	1,60	0,445
0,16	0,064	0,70	0,258	1,65	0,450
0,18	0,071	0,72	0,264	1,70	0,455
0,20	0,079	0,74	0,270	1,75	0,460
0,22	0,087	0,76	0,276	1,80	0,464
0,24	0,095	0,78	0,282	1,85	0,468
0,26	0,103	0,80	0,288	1,90	0,471
0,28	0,110	0,82	0,294	1,95	0,474
0,30	0,118	0,84	0,299	2,00	0,477
0,32	0,125	0,86	0,305	2,10	0,482
0,34	0,133	0,88	0,311	2,20	0,486
0,36	0,141	0,90	0,316	2,30	0,489
0,38	0,148	0,92	0,321	2,40	0,492
0,40	0,155	0,94	0,326	2,50	0,494
0,42	0,163	0,96	0,331	2,60	0,495
0,44	0,170	0,98	0,336	2,70	0,496
0,46	0,177	1,00	0,341	2,80	0,497
0,48	0,184	1,05	0,353	2,90	0,498
0,50	0,191	1,10	0,364	3,00	0,499
0,52	0,198	1,15	0,375	3,25	0,499
		1,20	0,385	3,50	0,500

BINOMINIŲ TIKIMYBIŲ $P_n(k)$ LENTELĖ

$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$P_n(k) = P_n(k,\ p) = P_{n-k}(n-k,\ 1-p)$

$P_5(2,\ 0{,}2) = P_5(3,\ 0{,}8) = 0{,}205$

n	k	p 0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
2	0	980	902	810	640	490	360	250
	1	020	095	180	320	420	480	500
	2	0	002	010	040	090	160	250
3	0	970	857	729	512	343	216	125
	1	029	135	243	384	441	432	375
	2	0	007	027	096	189	288	375
	3	0	0	001	008	027	064	125
4	0	961	815	656	410	240	130	062
	1	039	171	292	410	412	346	250
	2	001	014	049	154	265	346	375
	3	0	0	004	026	076	154	250
	4	0	0	0	002	008	026	062
5	0	951	774	590	328	168	078	031
	1	048	204	328	410	360	259	156
	2	001	021	073	205	309	346	312
	3	0	001	008	051	132	230	312
	4	0	0	0	006	028	077	156
	5	0	0	0	0	002	010	031
6	0	941	735	531	262	118	047	016
	1	057	232	354	393	303	187	094
	2	001	031	098	246	324	311	234
	3	0	002	015	082	185	276	312
	4	0	0	001	015	060	138	234
	5	0	0	0	002	010	037	094
	6	0	0	0	0	001	004	016
7	0	932	698	478	210	082	028	008
	1	066	257	372	367	247	131	055
	2	002	041	124	275	318	261	164
	3	0	004	023	115	227	290	273
	4	0	0	003	029	097	194	273
	5	0	0	0	004	025	077	164
	6	0	0	0	0	004	017	055
	7	0	0	0	0	0	002	008
8	0	923	663	430	168	058	017	004
	1	075	279	383	336	198	090	031
	2	003	051	149	294	296	209	109
	3	0	005	033	147	254	279	219
	4	0	0	005	046	136	232	273
	5	0	0	0	009	047	124	219
	6	0	0	0	001	010	041	109
	7	0	0	0	0	001	008	031
	8	0	0	0	0	0	001	004

n	k	p						
		0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
9	0	914	630	387	134	040	010	002
	1	083	299	387	302	156	060	018
	2	003	063	172	302	267	161	070
	3	0	008	045	176	267	251	164
	4	0	001	007	066	172	251	246
	5	0	0	001	017	074	167	246
	6	0	0	0	003	021	074	164
	7	0	0	0	0	004	021	070
	8	0	0	0	0	0	004	018
	9	0	0	0	0	0	0	002
10	0	904	599	349	107	028	006	001
	1	091	315	387	268	121	040	010
	2	004	075	194	302	233	121	044
	3	0	010	057	201	267	215	117
	4	0	001	011	088	200	251	205
	5	0	0	001	026	103	201	246
	6	0	0	0	006	037	111	205
	7	0	0	0	001	009	042	117
	8	0	0	0	0	001	011	044
	9	0	0	0	0	0	002	010
	10	0	0	0	0	0	0	001
11	0	895	569	314	086	020	004	0
	1	099	329	384	236	093	027	005
	2	005	087	213	295	200	089	027
	3	0	014	071	221	257	177	081
	4	0	001	016	111	220	236	161
	5	0	0	002	039	132	221	226
	6	0	0	0	010	057	147	226
	7	0	0	0	002	017	070	161
	8	0	0	0	0	004	023	081
	9	0	0	0	0	001	005	027
	10	0	0	0	0	0	001	005
	11	0	0	0	0	0	0	0
12	0	886	540	282	069	014	002	0
	1	107	341	377	206	071	017	003
	2	006	099	230	283	168	064	016
	3	0	017	085	236	240	142	054
	4	0	002	021	133	231	213	121
	5	0	0	004	053	158	227	193
	6	0	0	0	016	079	177	226
	7	0	0	0	003	029	101	193
	8	0	0	0	001	008	042	121
	9	0	0	0	0	001	012	054
	10	0	0	0	0	0	002	016
	11	0	0	0	0	0	0	003
	12	0	0	0	0	0	0	0

TURINYS